Extrait du Mémoire

présenté à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831 *

par M. Augustin Cauchy, membre de l'Institut de France.

Première Partie. Considérations générales.

§ 1er. Variation des constantes arbitraires.

Soient données, entre la variable t, n fonctions de t désignées par $x, y, z, \ldots$ et n autres fonctions de t désignées par $u, v, w, \ldots$, les équations différentielles du premier ordre et de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\Omega}{du}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dv}, & \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{d\Omega}{dw}, \ \ldots \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dx}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dy}, & \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{d\Omega}{dz}, \ \ldots \end{cases}$$

Ω représentant une fonction de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$. On pourra supposer les mêmes $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ exprimées en fonction de t et de n constantes arbitraires $a, b, c, \ldots$; et l'on aura, dans cette hypothèse,

$$\frac{d\Omega}{da} = \frac{d\Omega}{dx}\frac{dx}{da} + \frac{d\Omega}{dy}\frac{dy}{da} + \ldots + \frac{d\Omega}{du}\frac{du}{da} + \ldots,$$

par conséquent

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\Omega}{da} = -\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{da} - \dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{da} - \ldots + \dfrac{dx}{dt}\dfrac{du}{da} + \ldots. \\ \dfrac{d\Omega}{db} = -\dfrac{du}{dt}\dfrac{dx}{db} - \dfrac{dv}{dt}\dfrac{dy}{db} - \ldots + \dfrac{dx}{dt}\dfrac{du}{db} + \ldots \end{cases}$$

On trouvera de même

Si dans la seconde des équations (2), différentiée par rapport à la quantité a, on retranche la première différentiée par rapport à b, on obtiendra la suivante

$$(3)\quad \frac{d[a,b]}{dt} = 0,$$

la valeur de $[a,b]$ étant

---

* Dans cet extrait, je ferai à quelques unes des théories ou des formules que contient le mémoire, des corrections ou additions qui contribueront à rendre mon travail plus utile, et plus digne, je l'espère, de fixer l'attention des géomètres.

(4) $$[a,b] = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial u}{\partial b} - \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial v}{\partial b} - \frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial a} + \dots,$$

puis, en intégrant l'équation (3), on trouvera

(5) $$[a,b] = \text{constante}.$$

Donc les quantités représentées par les symboles $[a,b]$, $[a,c]$, ... $[b,c]$, ... seront indépendantes de t. Observons d'ailleurs qu'en vertu de la formule (4) on aura généralement

$$[a,a] = 0, \quad \text{et} \quad [a,b] = -[b,a].$$

Soient maintenant

(6) $$A = a, \quad B = b, \quad C = c, \quad \text{etc.}\dots$$

les intégrales générales des équations (1), A, B, C, ... désigneront des fonctions déterminées des seules variables $x, y, z, \dots u, v, w, \dots t$. Faisons de plus

(7) $$(A,B) = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial v} - \frac{\partial A}{\partial v}\frac{\partial B}{\partial y} + \dots$$

On aura encore

$$(A,A) = 0, \qquad (A,B) = -(B,A).$$

D'ailleurs, si, dans l'équation qui détermine x en fonction de $a, b, c, \dots t$, on substitue $A, B, C, \dots$ au lieu de $a, b, c, \dots$, on obtiendra une formule identique, qui, différentiée successivement par rapport à $x, y, z, \dots u, \dots$ donnera

(8) $$1 = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial B}{\partial x} + \dots, \quad 0 = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial B}{\partial y} + \dots, \quad 0 = \text{etc.}\dots, \quad \text{etc.}\dots;$$

et, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A,A), (A,B), (A,C), ... respectivement multipliées par $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$, ... on trouvera, en ayant égard aux formules (8),

(9) $$\begin{cases} (A,A)\frac{\partial x}{\partial a} + (A,B)\frac{\partial x}{\partial b} + (A,C)\frac{\partial x}{\partial c} + \dots = -\frac{\partial A}{\partial u}; \text{ on trouvera de même} \\ (A,A)\frac{\partial y}{\partial a} + (A,B)\frac{\partial y}{\partial b} + (A,C)\frac{\partial y}{\partial c} + \dots = -\frac{\partial A}{\partial v}, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

Pareillement, si l'on ajoute entre elles les valeurs de (A,A), (A,B), (A,C), ... respectivement multipliées par $\frac{\partial u}{\partial a}$, $\frac{\partial u}{\partial b}$, $\frac{\partial u}{\partial c}$, ..., on trouvera

(10) $$\begin{cases} (A,A)\frac{\partial u}{\partial a} + (A,B)\frac{\partial u}{\partial b} + (A,C)\frac{\partial u}{\partial c} + \dots = \frac{\partial A}{\partial x}; \text{ on aura de même} \\ (A,A)\frac{\partial v}{\partial a} + (A,B)\frac{\partial v}{\partial b} + (A,C)\frac{\partial v}{\partial c} + \dots = \frac{\partial A}{\partial y}, \\ \text{etc.}\dots \end{cases}$$

D'autre part, si l'on différencie successivement la première des formules (6) par rapport à chacune des quantités $a, b, c, \ldots$ en considérant $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ comme des fonctions de $a, b, c, \ldots t$, on en tirera

$$(11)\quad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \dfrac{\partial A}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial a} + \ldots + \dfrac{\partial A}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial a} + \ldots, \quad 0 = \dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial b} + \ldots, \quad 0 = \dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \ldots, \text{ etc.} \end{cases}$$

Cela posé, si l'on combine par voie d'addition les formules (9) et (10), après avoir multiplié respectivement les formules (9) par $-\frac{\partial u}{\partial a}, -\frac{\partial v}{\partial a}, -\frac{\partial w}{\partial a}$, et les formules (10) par $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}, \ldots$, on trouvera, en ayant égard à la première des équations (11),

$$(12)\quad \begin{cases} (A,A)[a,a] + (A,B)[a,b] + (A,C)[a,c] + \ldots = 1. \text{ On aura de même} \\ (A,A)[b,a] + (A,B)[b,b] + (A,C)[b,c] + \ldots = 0, \\ (A,A)[c,a] + (A,B)[c,b] + (A,C)[c,c] + \ldots = 0, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Les équations (12) suffiront pour déterminer les valeurs des quantités (A,B), (A,C), etc..., quand on connaît celles des quantités constantes $[a,b]$, $[a,c]$,... $[b,c]$. Des équations semblables détermineront les valeurs de (B,A), (B,C),... etc... Donc les quantités (A,B), (A,C), ... (B,C), etc... sont elles-mêmes constantes, et ne dépendent pas de la variable t.

Il est bon d'observer que, si, dans les équations (6) différenciées par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \ldots \frac{\partial u}{\partial t}, \ldots$ tirées des équations (1), les formules ainsi obtenues, savoir,

$$(13)\quad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial A}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial a} + \dfrac{\partial A}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial a} + \ldots - \dfrac{\partial A}{\partial u}\dfrac{\partial a}{\partial x} - \ldots, \quad 0 = \dfrac{\partial B}{\partial x}\dfrac{\partial a}{\partial u} + \ldots - \dfrac{\partial B}{\partial u}\dfrac{\partial a}{\partial x} \ldots, \text{ etc.} \end{cases}$$

auront pour seconds membres des fonctions identiquement nulles de $x, y, z, u, v, w, \ldots t$. Car, s'il en était autrement, il existerait entre les valeurs générales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots t$, et par conséquent aussi entre les valeurs initiales de $x, y, z, \ldots u, v, w, \ldots$ correspondantes à $t=0$, des équations qui ne renfermeraient aucune constante arbitraire; ce qui est absurde, puisque ces valeurs initiales peuvent être choisies arbitrairement.

Supposons maintenant qu'il s'agisse d'intégrer non plus les équations (1), mais les suivantes

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial u} + \dfrac{\partial R}{\partial u}, & \dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial v} + \dfrac{\partial R}{\partial v}, & \dfrac{\partial z}{\partial t} = \dfrac{\partial Q}{\partial w} + \dfrac{\partial R}{\partial w}, \text{ etc...} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial R}{\partial x}, & \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y} - \dfrac{\partial R}{\partial y}, & \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial z}, \text{ etc...} \end{cases}$$

On pourra supposer encore les valeurs de $x, y, z, \dots u, v, w, \dots$ déterminées par les équations (6), pourvu que l'on y considère $a, b, c, \dots$ comme devenant fonctions de t. Alors, si, dans la première des équations (6), différentiée par rapport à t, on substitue les valeurs de $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \dots \frac{du}{dt}, \dots$ tirées des équations (14), si d'ailleurs on a égard à la première des formules (12), qui subsiste, quelles que soient les valeurs de $x, y, z, \dots u, v, w, \dots t$, on trouvera

$$(15)\qquad \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial R}{\partial u} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial R}{\partial v} + \dots - \frac{\partial A}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial x} - \dots,$$

Puis, si, après avoir exprimé R en fonction de $a, b, c, \dots t, x, y$ on substitue au lieu de $a, b, c, \dots$ les fonctions de $x, y, z, \dots u, v, w, \dots t$ représentées par $A, B, C, \dots$, on retrouvera identiquement la première valeur de R; et l'on aura par suite

$$(16)\quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial b}\frac{\partial B}{\partial x} + \dots, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial b}\frac{\partial B}{\partial y} + \dots, \text{ etc..}, \quad \frac{\partial R}{\partial u} = \frac{\partial R}{\partial a}\frac{\partial A}{\partial u} + \dots \text{ etc}$$

Cela posé, la formule (15) donnera

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = (A, B)\dfrac{\partial R}{\partial b} + (A, C)\dfrac{\partial R}{\partial c} + \dots; \text{ on trouvera de même} \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = (B, A)\dfrac{\partial R}{\partial a} + (B, C)\dfrac{\partial R}{\partial c} + \dots, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Telles sont les équations différentielles qui devront servir à déterminer $a, b, c, \dots$ en fonction de t. Les coefficients de $\frac{\partial R}{\partial a}, \frac{\partial R}{\partial b}$, etc., dans ces équations, seront d'après les remarques précédemment faites, des fonctions des seules quantités $a, b, c, \dots$; et la variable t n'y entrera pas d'une manière explicite.

§ 2. Formules pour le développement des fonctions en série. Calcul des limites.

Soient p un arc réel, et n un nombre entier. On trouvera, en supposant $n > 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\, dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\, dp = 0, \tag{1}$$

et en supposant $n = 0$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi. \tag{2}$$

Soit de plus

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

une fonction entière de la variable x. Si l'on attribue à cette variable une valeur imaginaire $\bar{x}$ dont le module soit X, en sorte qu'on ait

$$\bar{x} = X e^{p\sqrt{-1}},$$

on tirera des formules (1) et (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x})\, dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left[\frac{1}{\bar{x}}\right] dp = 2\pi a_0.$$

On aura donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x})\, dp = 2\pi f(0). \tag{3}$$

Il est d'ailleurs facile d'étendre la formule (3) au cas où $f(\bar{x})$ cesse d'être une fonction entière de x. En effet on a généralement

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial X} = \frac{1}{X\sqrt{-1}} \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial p}.$$

Or, si l'on intègre les deux membres de l'équation précédente 1° par rapport à X, et à partir de $X = 0$, 2° par rapport à p entre les limites $p = -\pi$, $p = \pi$; et, si l'on suppose que la fonction de X et de p, représentée par $f(\bar{x})$, reste finie et continue, quel que soit p, pour la valeur attribuée à X, et pour une valeur plus petite, on retrouvera précisément la formule (3).

D'autre part, comme on a $d\bar{x} = \bar{x}\, dp\sqrt{-1}$, si les fonctions dérivées

$f'(\bar{x})$, $f''(\bar{x})$, ... $f^{(n)}(\bar{x})$ restant elles-mêmes finies et continues pour la valeur attribuée à X et pour des valeurs plus petites, il suffira d'appliquer l'intégration par parties à l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\, dp,$$

pour en conclure

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\, dp = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}}\, dp = \frac{1}{n(n-1)}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\bar{x})}{\bar{x}^{n-2}}\, dp = \text{etc. .....},$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\, dp = \frac{A}{1.2.3....n}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(\bar{x})\, dp,$$

ou, en vertu de la formule (3),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}\, dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3....n}. \tag{4}$$

Si la fonction $f(\bar{x})$ s'évanouit pour une valeur nulle de x, l'équation (3) donnera simplement

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\bar{x})\, dp = 0. \tag{5}$$

Des formules (3), (4), (5) on peut aisément déduire, comme on va le voir, celles qui servent à développer une fonction explicite ou implicite de la variable x en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de cette variable.

Si, dans la formule (5), on remplace $f(\bar{x})$ par le produit

$$\bar{x}\,\frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x},$$

x étant différent de $\bar{x}$, et le module de x inférieur à X, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\, f(\bar{x})}{\bar{x} - x}\, dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\, f(x)}{\bar{x} - x}\, dp = f(x)\int_{-\pi}^{\pi} \left\{1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + ..\right\} dp = 2\pi f(x),$$

et par suite

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\, f(\bar{x})}{\bar{x} - x}\, dp. \tag{6}$$

L'équation (6) suppose, comme les équations (3) et (5) que la fonction de X et de p représentée par $f(\bar{x})$ reste finie et continue pour la valeur

attribuée à X, et pour des valeurs plus petites.

Comme le rapport $\frac{\overline{x}}{\overline{x}-x}$ est la somme de la progression géométrique

$$1, \frac{x}{\overline{x}}, \frac{x^2}{\overline{x}^2}, \text{ etc...}$$

qui est toujours convergente, tant que le module de x reste inférieur au module X de $\overline{x}$, il suit de la formule (6) que $f(x)$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $f(x)$ cesse d'être finie et continue. Ainsi, en particulier, puisque les fonctions

$$\cos x, \sin x, e^x, e^{x^2}, \cos(1-x^2), \text{ etc...}$$

ne cessent jamais d'être finies et continues, elles seront toujours développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Au contraire les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, \text{ etc...}$$

qui, lorsqu'on attribue à x une valeur imaginaire de la forme $x\sqrt{-1}$, cessent d'être fonctions continues de x, au moment où le module X devient égal à 1, seront certainement développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de la variable x, si la valeur réelle ou imaginaire de x offre un module inférieur à l'unité; mais elles pourront devenir et deviendront en effet divergentes, si le module de x surpasse l'unité. Enfin, comme les fonctions

$$e^{\frac{1}{x}}, e^{\frac{1}{x^2}}, \cos\frac{1}{x}, \text{ etc...}$$

deviennent discontinues pour une valeur nulle de x, par conséquent, lorsque le module de x est le plus petit possible; elles ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

Il suit encore de la formule (6) que, dans le développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, le terme général sera

(7) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\bar{x}^n}f(\bar{x})\,dp=\frac{x^n}{1.2.3\ldots n}f^{(n)}(o).$$

Donc, lorsque la fonction $f(x)$ sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, on aura

(8) $$f(x)=f(o)+\frac{x}{1}f'(o)+\frac{x^2}{1.2}f''(o)+\text{etc...},$$

conformément au théorème de Maclaurin ou de Stirling.

Si l'on nomme ξ le module de x, et $\Lambda f(\bar{x})$ la limite du module de $f(\bar{x})$, c'est à dire, la plus grande valeur que ce module puisse acquérir, quand on y fait varier l'angle p sans changer le module X, le premier membre de la formule (7) aura* un module inférieur à

(9) $$\left[\frac{\xi}{X}\right]^n\Lambda f(\bar{x}),$$

c'est à dire au terme général de la progression géométrique qui a pour somme

(10) $$\frac{X}{X-\xi}\Lambda f(\bar{x}).$$

Donc le reste de cette progression géométrique, savoir

(11) $$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda f(\bar{x}),$$

---

* Comme le module de la somme $x+y+z+\ldots$ ne peut surpasser la somme des modules de $x, y, z, \ldots$ (voyez les exercices de mathématiques), si l'on désigne par $\varpi(x)$ une fonction réelle ou imaginaire d'une variable x, par a, b deux valeurs particulières de x, réelles et propres à vérifier la condition $a<b$, par n un très grand nombre, et par i le rapport $\frac{b-a}{n}$, le module du produit

$$i\{\varpi(a)+\varpi(a+i)+\cdots+\varpi(a+(n-1)i)\}$$

ne surpassera pas le produit de $ni=b-a$ par le plus grand module que $\varpi(x)$ puisse acquérir, quand on fait varier x entre les limites $x=a$, $x=b=a+ni$, et par conséquent ce plus grand module sera une limite supérieure au quotient qu'on obtient en divisant par $b-a$ l'intégrale $\int_a^b\varpi(x)\,dx$. Donc aussi le plus grand module du rapport $\frac{x^n}{\bar{x}^n}f(\bar{x})$, ou l'expression (9) surpassera le quotient de $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\bar{x}^n}f(\bar{x})\,dp$ par 2π.

surpassera le reste de la série convergente qui représente le développement de $f(x)$. On pourrait encore arriver à la même conclusion de la manière suivante.

On a généralement

$$\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x} = 1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{\bar{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}.$$

Par suite la formule (6) donnera

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots\cdots + \frac{x^{n-1}}{1.2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} f(\bar{x})\, dp.$$

Donc le reste de la série de Maclaurin prolongée jusqu'au n^{me} terme sera

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} f(\bar{x})\, dp \qquad (12)$$

Or, le module de la fonction renfermée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (12) étant inférieur à l'expression (11), il s'ensuit qu'on pourra en dire autant de l'intégrale même.

En résumant ce qu'on vient de dire, on obtient la proposition suivante

1er Théorème. La fonction $f(x)$ sera développable par la formule de Stirling en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendentes de x, si le module de la variable réelle ou imaginaire x conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction cesse d'être finie et continue. Soient X cette dernière valeur ou une valeur plus petite, et $\bar{x}$ une expression imaginaire qui offre le module X. Les modules du terme général et du reste dans la série de Stirling seront respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste dans la progression géométrique qui a pour

somme

(17) $$\frac{X}{X-x}\,\Lambda f(\bar{x}),$$

par conséquent au terme général et au reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression (10), ξ désignant le module de X.

De même, si l'on désigne par $f(x,y,z,\dots)$ une fonction des variables $x, y, z, \dots$, par $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ des valeurs imaginaires attribuées à ces variables, par $X, Y, Z, \dots$ les modules de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ et par $\Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots)$ la limite du module de $f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots)$, c'est-à-dire, la plus grande valeur que ce module puisse acquérir quand on y fait varier les rapports imaginaires $\frac{\bar{x}}{X}, \frac{\bar{y}}{Y}, \frac{\bar{z}}{Z}, \dots$ sans changer $X, Y, Z, \dots$, on établira facilement la proposition suivante.

2e Théorème. La fonction $f(x,y,z,\dots)$ sera développable, par la formule de Stirling étendue au cas de plusieurs variables, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \dots$ si les modules des variables réelles ou imaginaires $x, y, z, \dots$ conservent des valeurs inférieures à celles pour lesquelles la fonction cesse d'être finie et continue. Soient $X, Y, Z, \dots$ ces dernières valeurs ou des valeurs plus petites, et $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots$ des expressions imaginaires qui offrent pour modules $X, Y, Z, \dots$ des modules du terme général et du reste de la série en question formant respectivement inférieurs aux modules du terme général et du reste de la série qui a pour somme le produit

(18) $$\frac{X}{X-x}\,\frac{Y}{Y-y}\,\frac{Z}{Z-z}\cdots\Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots),$$

par conséquent au terme général et au reste de la série qui a pour somme

(19) $$\frac{X}{X-\xi}\,\frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\zeta}\cdots\Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z},\dots),$$

ξ, η, ζ étant les modules de $x, y, z, \ldots$

Telles sont les propositions qui, dans le calcul des limites, servent de base à la théorie du développement des fonctions explicites d'une ou de plusieurs variables $x, y, z, \ldots$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$. Observons en outre que le théorème (1) peut être appliqué même au développement des fonctions d'une seule variable. Car, pour développer $f(x, y, z, \ldots)$ suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \ldots$, il suffit de développer, suivant les puissances ascendantes de α, la fonction

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots),$$

ou même la suivante

$$f(\alpha^{\kappa} x, \alpha^{\kappa'} y, \alpha^{\kappa''} z, \ldots),$$

$\kappa, \kappa', \kappa'', \ldots$ étant des nombres entiers quelconques, et de plus assujettis à $\alpha > 1$. En opérant de cette manière, on prouvera sans peine que, dans le développement de $f(x, y, z, \ldots)$ on réduise les termes où les exposants $\kappa, \kappa', \kappa'', \ldots$ de $x, y, z, \ldots$ vérifient la condition

$$\kappa\kappa + \kappa'\kappa' + \kappa''\kappa'' + \ldots = \text{ou} > k, \tag{16}$$

(k étant un nombre entier donné), l'erreur commise en ne négligeant pas

$$\frac{1}{\lambda^{k(\delta-1)}} \Lambda f(\bar{\alpha}^{\kappa} x, \bar{\alpha}^{\kappa'} y, \bar{\alpha}^{\kappa''} z, \ldots), \tag{17}$$

Λ désignant le module de $\bar{\alpha}$, et ce module étant supérieur à l'unité, mais choisi de manière que la fonction

$$f(\bar{\alpha}^{\kappa} x, \bar{\alpha}^{\kappa'} y, \bar{\alpha}^{\kappa''} z, \ldots)$$

reste finie et continue pour ce même module de $\bar{\alpha}$ et pour des modules plus petits. Dans le cas où les nombres $\kappa, \kappa', \kappa'', \ldots$ se réduisent à l'unité, la condition (16) donne simplement

$$\kappa + \kappa' + \kappa'' + \ldots = \text{ou} > k, \tag{18}$$

et l'expression (17) se réduit elle-même à

(19) $$\frac{1}{A^{h-1}(h-1)}\,\Lambda f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \ldots).$$

La détermination de limites supérieures aux valeurs absolues qui représentent les développements des fonctions explicites se trouve ainsi ramenée par les théorèmes I et 2 à la détermination des quantités de la forme

(20) $$\Lambda f(\bar{x}) \quad \text{ou} \quad \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$$

On pourrait même à ces quantités en substituer d'autres qui seraient généralement plus grandes. Or il est généralement facile de déterminer ou les valeurs exactes des expressions (20) ou des nombres qui surpassent ces valeurs. Ainsi par exemple, si l'on désigne par a une quantité positive et par x la base des logarithmes népériens, on prendra successivement pour $f(x)$ les fonctions

$$a \pm x, \quad ax, \quad \frac{a}{x}, \quad e^{\pm x}, \quad a^{\pm x\sqrt{-1}}, \quad a^{\pm x}, \quad a^{\pm x\sqrt{-1}}$$

on trouvera

(21) $$\begin{cases} \Lambda(a+\bar{x}) = \Lambda(a-\bar{x}) = a + X, \\ \Lambda(a\bar{x}) = aX, \quad \Lambda\left(\frac{a}{\bar{x}}\right) = \frac{a}{X}, \\ \Lambda e^{\bar{x}} = \Lambda e^{-\bar{x}} = \Lambda e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^{X}, \\ \Lambda a^{\bar{x}} = \Lambda a^{-\bar{x}} = \Lambda a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{X}. \end{cases}$$

De même, en prenant pour $f(x)$ les fonctions

$$(1 \pm x)^{a}, \quad (1 \pm x)^{-a},$$

et supposant $X < 1$, on trouvera

(22) $$\begin{cases} \Lambda(1+\bar{x})^{a} = \Lambda(1-\bar{x})^{a} = (1+X)^{a}, \\ \Lambda(1+\bar{x})^{-a} = \Lambda(1-\bar{x})^{-a} = (1-X)^{-a}. \end{cases}$$

Si l'on prend $f(x) = \sin x$, le carré du module de $f(\bar{x}) = \sin\bar{x}$ aura la valeur suivante

$$e^{2X\sin p} + e^{-2X\sin p} - 2\cos(2X\cos p).$$

Or il suffit de faire varier l'angle p entre les limites $p=0$, $p=\frac{\pi}{2}$, puisque ce trinôme acquerra toutes les valeurs qu'il peut recevoir; et, comme sa Dérivée relative à p est le produit de $4X^2 \sin p \cos p$ par la différence

$$\frac{e^{2X\sin p} - e^{-2X\sin p}}{2X\sin p} - \frac{\sin(2X\cos p)}{2X\cos p}$$

qui reste toujours positive, puisque le premier terme est supérieur et le second inférieur à l'unité*, il est clair que le module de $\sin\bar{x}$ croîtra sans cesse depuis $p=0$ jusqu'à $p=\frac{\pi}{2}$. Donc $\Lambda\sin\bar{x}$ sera le module de $\sin\bar{x}$ pour $\bar{x} = Xe^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = X\sqrt{-1}$, auquel cas on aura

$$(23)\quad \begin{cases} \Lambda\sin\bar{x} = \dfrac{e^{X} - e^{-X}}{2}; \text{ on trouvera de même} \\ \Lambda\cos\bar{x} = \dfrac{e^{X} + e^{-X}}{2}. \end{cases}$$

On aura par suite

$$(24)\quad \begin{cases} \Lambda\sin(x \pm \bar{x}) = \text{ou} < \dfrac{e^{X} - e^{-X}}{2}\sqrt{\cos^2 a} + \dfrac{e^{X} + e^{-X}}{2}\sqrt{\sin^2 a}, \\ \Lambda\cos(x \pm \bar{x}) = \text{ou} < \dfrac{e^{X} + e^{-X}}{2}\sqrt{\cos^2 a} + \dfrac{e^{X} - e^{-X}}{2}\sqrt{\sin^2 a}, \end{cases}$$

etc...

Soient encore $u, v, w, \ldots$ des fonctions des variables $x, y, z, \ldots$, et $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \ldots$ ce que deviennent $u, v, w, \ldots$ quand on y remplace x par $\bar{x}$, y par $\bar{y}$, z par $\bar{z}$, ... On trouvera

---

* On a effectivement, pour des valeurs réelles de x,

$$\frac{e^{x} - e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \ldots > 1, \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{x} < 1.$$

$$(25)\quad \begin{cases} \Lambda(\bar u \pm \bar v \pm \bar w \pm \dots) = \text{ou} < \Lambda\bar u + \Lambda\bar v + \Lambda\bar w + \dots, \\ \Lambda(\bar u\,\bar v\,\bar w \dots) = \text{ou} < \Lambda\bar u \,.\, \Lambda\bar v \,.\, \Lambda\bar w \dots. \\ \text{etc...} \end{cases}$$

$$(26)\quad \begin{cases} \Lambda\, a^{\bar u\sqrt{-1}} = \text{ou} < \varepsilon\Lambda \cos\bar u, \\ \text{etc...} \end{cases}$$

Pour faciliter la recherche des quantités égales ou supérieures à $\Lambda\varphi(\bar x)$, $\Lambda\varphi(\bar x, \bar y, \bar z)$, il est utile de considérer non seulement les plus grandes mais encore les plus petites valeurs que peuvent acquérir des fonctions de $\bar x, \bar y, \bar z, \dots$ quand on fait varier les rapports $\frac{\bar x}{X}, \frac{\bar y}{Y}, \frac{\bar z}{Z}, \dots$ Convenons que les plus grandes valeurs seront toujours indiquées à l'aide de la caractéristique Λ, ou de lettres les plus petites à l'aide de la même caractéristique suivie d'un accent ou de Λ'. On trouvera, en supposant a positif

$$(27)\quad \begin{cases} \Lambda'(a+\bar x) = \Lambda'(a-\bar x) = a - X, \quad \text{pour } X < a, \\ \Lambda'(a+\bar x) = \Lambda'(a-\bar x) = X - a, \quad \text{pour } X > a, \\ \Lambda'(a\bar x) = aX, \quad \Lambda'\left(\frac{a}{\bar x}\right) = \frac{a}{X}, \\ \Lambda' e^{\bar x} = \Lambda' e^{-\bar x} = \Lambda' a^{\bar x\sqrt{-1}} = \Lambda' a^{-\bar x\sqrt{-1}} = a^{-X}, \\ \Lambda' a^{\bar x} = \Lambda' a^{-\bar x} = \Lambda' a^{\bar x\sqrt{-1}} = \Lambda' a^{-\bar x\sqrt{-1}} = a^{-X}; \end{cases}$$

$$(28)\quad \left.\begin{cases} \Lambda'(1+\bar x)^a = \Lambda'(1-\bar x)^a = (1-X)^a \\ \Lambda'(1+\bar x)^{-a} = \Lambda'(1-\bar x)^{-a} = (1+X)^{-a} \end{cases}\right\} \text{pour } X < 1,$$

$$(29)\quad \Lambda' \sin\bar x = \sin X, \quad \Lambda' \cos\bar x = \cos X$$

$$(30)\quad \Lambda'(\bar u\,\bar v\,\bar w \dots) = \text{ou} > \Lambda'\bar u \,.\, \Lambda'\bar v, \Lambda'\bar w \dots.$$

etc...

On aura d'ailleurs

$$(31)\quad \Lambda\frac{\bar u}{\bar v} = \text{ou} < \frac{\Lambda\bar u}{\Lambda'\bar v}, \quad \Lambda'\frac{\bar u}{\bar v} = \text{ou} > \frac{\Lambda'\bar u}{\Lambda\bar v},$$

(32) $$\begin{cases} \Lambda'(\bar u \pm \bar v) = \text{ou} > \Lambda'\bar u - \Lambda\bar v, & \text{si } \Lambda'\bar u > \Lambda\bar v, \\ \Lambda'(\bar u \pm \bar v) = \text{ou} > \Lambda'\bar v - \Lambda\bar u, & \text{si } \Lambda'\bar v > \Lambda\bar u, \end{cases}$$

etc...

Supposons qu'à l'aide de ces diverses formules on veuille calculer par exemple une limite égale ou supérieure à

$$\Lambda \frac{\bar v}{\bar x - \bar u},$$

en supposant $\Lambda\bar u < X$. On trouvera successivement

$$\Lambda \frac{\bar v}{\bar x - \bar u} = \text{ou} < \frac{\Lambda\bar v}{\Lambda'(\bar x - \bar u)},$$

et

$$\Lambda'(\bar x - \bar u) = \text{ou} < X - \Lambda\bar u,$$

puis on en conclurra

(33) $$\Lambda \frac{\bar v}{\bar x - \bar u} = \text{ou} < \frac{\Lambda\bar v}{X - \Lambda\bar u}.$$

Lorsqu'à l'aide de formules semblables à celles qui précèdent on a déterminé les quantités (30) ou des quantités évidemment plus grandes et qu'on peut leur substituer sans inconvénient, il convient de chercher les modules $X, Y, Z, \ldots$ desquels dépendent ces mêmes quantités, de manière que les limites supérieures aux modules des termes généraux des séries que l'on considère et des restes qui complètent ces séries acquièrent les plus petites valeurs possibles.

Observons encore que, dans la recherche d'une limite supérieure au module du reste qui complète le développement de $f(x)$, on peut substituer à la formule (11) la plus grande valeur que puisse acquérir le module de la fonction renfermée sous le signe $\int$ dans l'intégrale (12), c'est à dire, la quantité représentée par la notation

(34) $$\Lambda\left\{\frac{x^n}{\bar x^{n-1}(\bar x - x)} f(\bar x)\right\}.$$

En prenant cette dernière quantité, au lieu de la quantité (11), pour la

limite dont il s'agit, on diminuera souvent la valeur de cette limite, attendu que l'on aura généralement

$$\Lambda\left\{\frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\,f(\bar{x})\right\} = \text{ou} < \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda\, f(\bar{x}). \tag{25}$$

Mais d'un autre côté, le calcul de cette même limite deviendra plus difficile. Il semble que pour cette raison on devra ordinairement préférer la formule (11) à la formule (24).

Lorsqu'on a déterminé la quantité (24) en fonction de X, il convient de choisir X de manière à ce que cette quantité devienne la plus petite possible. Alors l'expression (24), considérée comme une valeur particulière du module de la fonction

$$\frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\,f(\bar{x}) \tag{26}$$

est tout à la fois un <u>maximum maximorum</u> de ce module, relativement à l'angle p, et un <u>minimum</u> relativement à X, ou, ce que nous avons nommé dans un autre mémoire, le <u>module principal</u> de la fonction (26); [voyez le tome 8e des Mémoires de l'Institut].

Pour montrer une application des principes que nous venons d'établir, prenons successivement pour $f(x)$ les deux fonctions

$$e^x, \quad (1+x)^{-a},$$

qui, comme on l'a vu, peuvent être développées en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x, la première, quel que soit x, la seconde, lorsque le module de x est inférieur à l'unité. Les expressions (9) et (11) deviendront, pour $f(x) = e^x$,

$$\frac{\xi^n}{X^n}\,e^X, \qquad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,e^X, \tag{27}$$

et, pour $f(x) = (1+x)^{-a}$,

$$\frac{\xi^n}{X^n(1-X)^a}, \qquad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{1}{(1-X)^a}. \tag{28}$$

la première des expressions (37), considérée comme fonction de X acquiert la plus petite valeur possible, lorsqu'on suppose $X = n$, et alors ces expressions se réduisent à

$$\left(\frac{e\xi}{n}\right)^n, \qquad \frac{n}{n-\xi}\left(\frac{e\xi}{n}\right)^n. \tag{39}$$

Donc les quantités (39) sont des limites supérieures avec module du terme général de la série qui représente le développement de e^x et du reste qui le complète, ξ désignant le module de X. Pareillement la première des expressions (38), considérée comme fonction de X, acquerra la plus petite valeur possible, lorsqu'on supposera $X = \frac{n}{n+a}$; et alors les expressions (38) deviendront

$$\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\,\xi^n, \qquad \frac{n}{n(1-\xi)-\xi}\,\frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\,\xi^n. \tag{40}$$

Donc les quantités (40) sont des limites supérieures avec module du terme général de la série qui représente le développement de $(1+x)^{-a}$ et du reste qui le complète.

Concevons maintenant que l'on prenne pour $f(x)$ une fraction rationnelle, en sorte qu'on ait

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{F(x)},$$

$\varphi(x)$ et $F(x)$ désignant deux fonctions entières de x. Soit d'ailleurs ρ le plus petit des nombres $\rho, \rho', \rho'', \ldots$ qui représentent les modules respectifs de l'équation

$$F(x) = 0.$$

On conservera des principes établis ci-dessus 1° que la fraction rationnelle $\frac{\varphi(x)}{F(x)}$ sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module ξ de la variable x sera inférieur à ρ; 2° que, si l'on attribue à X une valeur intermédiaire entre ξ et ρ, le reste de la série offrira un module inférieur au produit

$$\frac{\xi^n}{X^n(X-\xi)}\,\Lambda\,\frac{\varphi(\bar{x})}{F(\bar{x})}.$$

D'autre part, comme, en appellant K la valeur numérique ou le module de $F(o)$, on aura

$$\Lambda \frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})} = ou < \frac{\rho\rho'\rho''\ldots}{K} \frac{\Lambda f(\bar{x})}{(\rho - X)(\rho' - X)(\rho'' - X)\ldots},$$

il est clair que le module du reste de la série sera encore inférieur au rapport

$$\frac{\rho\rho'\rho''\ldots \rho^{n}\Lambda f(\bar{x})}{KX^{n-1}(X-\rho)(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)\ldots}.$$

Parmi les valeurs qu'on peut attribuer à X, il serait difficile de calculer celle qui fournit le minimum du rapport dont il s'agit, ou même le maximum du produit

$$X^{n-1}(X-\rho)(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)\ldots.$$

Mais on déterminera sans peine les deux valeurs de X qui fournissent les maxima des deux produits

$$X^{n-1}(\rho - X), \quad (X-\rho)(\rho-X);$$

et ces deux valeurs feront connaître deux limites supérieures au module du reste de la série qui représentera le développement de $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Si, au lieu de prendre pour $f(x)$ la fraction rationnelle $\frac{f(x)}{F(x)}$, on supposait

$$f(x) = \left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^{a},$$

a étant un nombre fractionnaire ou irrationnel, un module de x inférieur à ρ rendrait encore la fonction $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^{a}$ développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, pourvu que le nombre ρ désignât le plus petit des modules appartenant aux racines des deux équations

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0.$$

Alors aussi le reste de la série offrirait un module inférieur au

produit

$$\frac{\xi^n}{x^{n-1}(x-\xi)}\,\Lambda\left(\frac{\xi(\bar{x})}{\xi(\bar{x})}\right)^a.$$

Si, pour fixer les idées, on suppose

$\xi(x)=1$, $\quad F(x)=1-2x\cos\lambda+x^2=(x-e^{\lambda\sqrt{-1}})(x-e^{-\lambda\sqrt{-1}})$, λ étant réel, on trouvera $g=1$; et l'on en conclura que tout module de x inférieur à l'unité rend la fonction

$$(1-2x\cos\lambda+x^2)^{-a}$$

développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x; ce que l'on savait déjà par un mémoire de M. Laplace et une note de M. Plana insérée dans le 12e volume de la correspondance astronomique de M. de Zach]. On reconnaîtra aussi que la série de la série offre un module inférieur au rapport

$$\frac{\xi^n}{x^{n-1}(x-\xi)(1-x)^{2a}},$$

et par suite aux deux nombres

$$\frac{(n+2a-1)^{n+2a}}{(n-1)^{n-1}(2a)^{2a}}\,\frac{\xi^n}{(n-1)(1-\xi)-2a\xi}, \qquad \frac{(2a+1)^{n+2a}}{(2a)^{2a}}\,\frac{(1-\xi)^{2a+1}\xi^n}{(1+2a\xi)^{n-1}},$$

qui représentent les valeurs du même rapport correspondantes aux valeurs maxima des produits

$$x^{n-1}(1-x)^{2a}, \quad (x-\xi)(1-x)^{2a}.$$

Avant de passer à la théorie du développement des fonctions implicites, nous ferons remarquer que l'exposition des principes ci-dessus établis peut être simplifiée à l'aide du calcul des résidus. En effet les formules (1), (2), (3), (5), (6), (8), qui diffèrent entre elles, se trouvent toutes comprises dans une des formules fondamentales que précède le calcul des résidus, et que l'on peut écrire comme il suit:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\overline{x})\, dp = 2\pi \sum_{(0)}^{(\infty)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{\varphi(x)}{n} \right) \right), \tag{41}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction qui conserve une valeur unique et déterminée pour toute valeur réelle ou imaginaire de x correspondante à un module renfermé entre les limites $0, X$.

Soit maintenant y une fonction implicite de x, déterminée par une équation de la forme

$$f(x, y) = 0, \tag{42}$$

et b une valeur de y qui corresponde à une valeur particulière a de x. Si l'on fait

$$y = b + z, \tag{43}$$

l'équation (42) deviendra

$$f(x, b+z) = 0. \tag{44}$$

Cela posé, désignons par $\chi(x,y)$ la dérivée de $f(x,y)$ prise par rapport à y, ensorte qu'on ait identiquement

$$\chi(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}. \tag{45}$$

Supposons d'ailleurs que l'équation (44) admette une seule racine réelle ou imaginaire z dont le module soit inférieur à Z_0, que la fonction $f(x, b+z)$ conserve une valeur unique et déterminée pour toute valeur réelle ou imaginaire de z qui offre un module égal ou inférieur à Z_0, et que, pour une semblable valeur de z, la fonction $F(y) = F(b+z)$ ne devienne jamais ni discontinue ni infinie. On aura

$$F(y) = \sum_{(0)}^{(Z)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} F(b+z) \right) \right), \tag{46}$$

le signe Σ se rapportant à la variable z. D'autre part, si l'on désigne par $\overline{z}$ une expression imaginaire dont le module soit Z_0, ensorte qu'on ait

(47) $$\bar z = Z_1 e^{q\sqrt{-1}},$$

q représentant un arc réel, la formule (45) donnera

(48) $$\sum_{(0)}^{(2\pi)}\sum_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\!\!\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)\!\!\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Sigma\,\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}F(b+\bar z)\,dq$$

Donc l'équation (46) pourra être réduite à

(49) $$F(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Sigma\,\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}F(b+\bar z)\,dq.$$

On peut en outre déduire directement la formule (49) de la formule (5) en opérant comme il suit

Lorsqu'on suppose $\bar z = z$, les deux termes du binôme

$$\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}F(b+\bar z) - \frac{F(b+z)}{\bar z - z}$$

deviennent infinis; mais ce binôme lui-même acquiert généralement une valeur finie, savoir,

$$\frac{\partial F(b+z)}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{F(b+z)}{\chi(x,b+z)}\frac{\partial\chi(x,b+z)}{\partial z}.$$

Donc, si le module Z_1 de z est choisi de manière à remplir les conditions précédemment énoncées, savoir, 1° que l'équation (44) admette une seule racine dont le module soit inférieur à Z_1, pourvu que la fonction $F(b+z)$ ne devienne point infinie ou discontinue pour un module de z égal ou inférieur à Z_1, le produit

(50) $$\bar z\left\{\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}F(b+\bar z) - \frac{F(b+z)}{\bar z - z}\right\}$$

restera fonction continue de Z_1 et de q pour la valeur attribuée à Z_1 ou pour une valeur plus petite. Or, si, dans l'équation (5), on remplace z par $\bar z$, et la fonction $f(z)$ par le produit (50), on trouvera, en prenant pour z la racine de l'équation (44)

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Sigma\,\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}F(b+\bar z)\,dq = F(b+z)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\Sigma\,\partial q}{\bar z - z} = 2\pi F(b+z) = 2\pi F(y);$$

et l'on sera ainsi ramené à la formule (49).

Lorsque dans la formule (49), on pose $F(y) = 1$, elle donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, \partial q = 1 . \tag{51}$$

Lorsqu'on y suppose au contraire

$$F(y) = y ,$$

on en conclut

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \, (b+\bar{z}) \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, \partial q , \tag{52}$$

puis, en ayant égard à l'équation (51)

$$y = b + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z}^2 \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, \partial q . \tag{53}$$

Si l'équation (44) admettait m racines égales ou inégales dont les modules fussent inférieurs à Δ, en désignant par $z, z_1, z_2, \dots z_{m-1}$ ces mêmes racines, et par $y, y_1, y_2, \dots y_{m-1}$ les racines correspondantes de l'équation (42), on trouverait

$$F(y) + F(y_1) + \dots + F(y_{m-1}) = \sum_{(x)}^{(z)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} \, F'(b+z) \right) \right) , \tag{54}$$

puis de cette dernière formule, combinée avec l'équation (48), on déduirait la suivante

$$F(y) + F(y_1) + \dots + F(y_{m-1}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, F'(b+\bar{z}) \, \partial q , \tag{55}$$

que l'on peut établir directement aussi bien que l'équation (49). Si, dans la formule (55) on pose $F(y) = 1$, elle donnera

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, \partial q = m . \tag{56}$$

Si l'on pose au contraire $F(y) = y$, on trouvera

$$y + y_1 + y_2 + \dots + y_{m-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \, (b+\bar{z}) \, \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \, \partial q , \tag{57}$$

puis, en ayant égard à l'équation (56),

(58) $$y + y_1 + y_2 + \cdots + y_{m-1} = mb + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta}^{\pi} \bar{z}^{-a}\,\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\,\partial_{\bar{z}}.$$

Nous montrerons tout à l'heure comment à l'aide des formules (50), (53), (49) et (55) on peut développer les fonctions implicites de la variable x en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de cette variable. Mais auparavant il importe d'établir une proposition digne de remarque, et qui peut être employée très utilement quand on veut déterminer le nombre des racines de l'équation (44) qui offrent un module inférieur à Z. Voici l'énoncé de cette proposition.

1er Théorème. Soit m le nombre des racines de l'équation

(59) $$f(0, b+z) = 0,$$

qui offrent des modules plus petits que Z. Supposons d'ailleurs 1° que, pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, la fonction $f(x, b+z)$, obtienne toujours une valeur unique et déterminée, 2° que, Z étant le module de $\bar{z}$, le logarithme Népérien du rapport $\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$, ou

(60) $$l\,\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$$

soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, pour tout module de x inférieur à X. Pour un semblable module de x, l'équation (44) offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront plus petits que Z.

Démonstration. En effet admettons que, pour un module de x inférieur à X, on puisse développer

$$l\,\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$$

en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. On aura

$$\frac{1}{f(x,b+\bar z)}\frac{f(x,b+\bar z)}{f(0,b+\bar z)} = x\bar u_1 + x^2\bar u_2 + x^3\bar u_3 + \text{etc.}, \tag{61}$$

$\bar u_1, \bar u_2, \bar u_3, \ldots\ldots$ étant des fonctions de $\bar z$ que pourront s'exprimer uniquem. des valeurs que prennent la fonction $f(x,b+\bar z)$ et ses dérivées relatives à la variable x quand x s'évanouit. On tirera de l'équation (61)

$$\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)} = \frac{\chi(0,b+\bar z)}{f(0,b+\bar z)} + x\frac{\partial(\bar u_1)}{\partial\bar z} + x^2\frac{\partial(\bar u_2)}{\partial\bar z} + \text{etc.}; \tag{62}$$

puis, en intégrant par rapport à q, entre les limites

$$q = -\pi,\quad q = \pi,$$

les deux membres de la formule (62), multipliés par

$$\bar z\,\partial q = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\partial\bar z,$$

et observant d'ailleurs que, entre ces limites, les intégrales

$$\int\frac{\partial(\bar u_1)}{\partial\bar z}\,\partial\bar z = \bar u_1 + \text{const.},\quad \int\frac{\partial(\bar u_2)}{\partial\bar z}\,\partial\bar z = u_2 + \text{const.}\ \text{etc.}\ldots$$

s'évanouissent, on trouvera

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}\,\bar z\,\partial q = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(0,b+\bar z)}{f(0,b+\bar z)}\,\bar z\,\partial q,$$

ou, ce qui revient au même

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(x,b+\bar z)}{f(x,b+\bar z)}\,\bar z\,\partial q = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(0,b+\bar z)}{f(0,b+\bar z)}\,\bar z\,\partial q. \tag{63}$$

De cette dernière formule, combinée avec la formule (56), il résulte que, dans l'hypothèse admise, le nombre des racines qui offrent des modules inférieurs à $\mathfrak{B}$ sera le même pour l'équation (44) et pour l'équation (59), ce qu'il s'agissait de démontrer.

Lorsqu'une seule racine de l'équation (59) présente un module inférieur à Z, alors en supposant remplies les conditions énoncées dans le 2e théorème, l'on peut affirmer que l'équation (64) offre pareillement une seule racine dont le module soit inférieur à Z.

Il est bon d'observer que la démonstration donnée ci-dessus du 2e théorème repose entièrement sur la formule (62) ; et, comme cette formule subsiste toutes les fois que, pour un module de x inférieur à X, le rapport

$$\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} \tag{64}$$

est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, il est clair qu'on peut au théorème 2 substituer la proposition suivante.

1e Théorème. Soit m le nombre de racines de l'équation (59) qui offrent des modules plus petits que Z. Supposons d'ailleurs i° que, pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, la fonction $f(x, b+z)$ obtienne toujours une valeur unique et déterminée, 2° que, pour un module de x inférieur à X, le rapport (64) soit développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Pour un semblable module de x, l'équation (64) offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront plus petits que Z.

Concevons à présent que l'on intègre, entre les limites $q=-\pi$, $q=\pi$, la formule (62), après avoir multiplié les deux membres, non plus seulement par $\Sigma\, dq$, mais par le produit

$$\Sigma'(b+z).\Sigma\, dq = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\Sigma'(b+z)\,dz,$$

la fonction $\Sigma'(y) = \Sigma'(b+z)$ étant choisie de manière que $\Sigma'(b+z)$ reste

finie et continue pour un module de z égal ou inférieur à Z_0. Alors, en posant pour abréger

$$\frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \bar{z}} = v_n, \tag{65}$$

puis ayant égard à l'équation (55), et désignant par $f, f_1, \dots f_{m-1}$ celles des racines de l'équation

$$f(o, y) = o \tag{66}$$

qui correspondent à des modules de z plus petits que Z_0, on trouvera

$$\left\{ \begin{aligned} &F(y) + F(y_1) + \dots + F(y_{m-1}) = F(f) + F(f_1) + \dots + F(f_{m-1}) \\ &+ \frac{n}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_1 \bar{z} F'(b+\bar{z})\, dq + \frac{n^2}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_2 \bar{z}\, F'(b+\bar{z})\, dq + \dots \end{aligned} \right. \tag{67}$$

Depuis, comme, n étant un nombre entier quelconque, l'intégration par parties donnera

$$\int F'(b+\bar{z})\, d\bar{u}_n = u_n F'(b+\bar{z}) - \int \bar{u}_n F''(b+\bar{z})\, d\bar{z},$$

ou, ce qui revient au même

$$\int F'(b+\bar{z}) \frac{\partial \bar{u}_n}{\partial \bar{z}} \bar{z}\, dq = \frac{\bar{u}_n F'(b+\bar{z})}{\sqrt{-1}} - \int \bar{u}_n F''(b+\bar{z}).\bar{z}\, dq,$$

et par suite

$$\int_{-\pi}^{\pi} F'(b+\bar{z})\, \bar{v}_n \bar{z}\, dq = -\int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_n \bar{z} F''(b+\bar{z})\, dq, \tag{68}$$

on trouvera encore

$$\left\{ \begin{aligned} &F(y) + F(y_1) + \dots + F(y_{m-1}) = F(f) + F(f_1) + \dots + F(f_{m-1}) \\ &- \frac{n}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_1 \bar{z} F''(b+\bar{z})\, dq - \frac{n^2}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_2 \bar{z} F'''(b+\bar{z})\, dq - \dots \end{aligned} \right. \tag{69}$$

Les valeurs des intégrales que renferment les équations (67), (69) peuvent être aisément déterminées à l'aide de la formule (48) de laquelle on tire

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_n \bar{z} F'(b+\bar{z})\, dq = \sum_{(o)}^{(z)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} F'(b+z)\, (\!(v_n)\!),$$

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_n \bar{z} F''(b+\bar{z})\, dq = \sum_{(o)}^{(z)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} F''(b+z)\, (\!(u_n)\!),$$

u_n et v_n désignent ce que deviennent $\bar{u}_n$ et $\bar{v}_n$ quand on y remplace $\bar{z}$ par z, ou, ce qui revient au même les coefficients de x^n dans les développements des expressions

(70) $\quad 1 \quad \dfrac{\mathcal{F}(x, b+z)}{\mathcal{F}(0, b+z)}$, $\qquad$ (71) $\quad \dfrac{\chi(x, b+z)}{\mathcal{F}(x, b+z)}$.

Cela posé, les formules (67), (69) donneront

(72) $$\begin{cases} \mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(y_1) + \cdots + \mathcal{F}(y_{m-1}) = \mathcal{F}(b) + \mathcal{F}(b_1) + \cdots + \mathcal{F}(b_{m-1}) \\ + x \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((v_1)) + x^2 \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((v_2)) + \cdots, \end{cases}$$

et

(73) $$\begin{cases} \mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(y_1) + \cdots + \mathcal{F}(y_{m-1}) = \mathcal{F}(b) + \mathcal{F}(b_1) + \cdots + \mathcal{F}(b_{m-1}) \\ - x \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((u_1)) - x^2 \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((u_2)) - \cdots, \end{cases}$$

Si, dans les formules (69) et (70), on prend $\mathcal{F}(y) = 1$, on retrouvera immédiatement ramené au théorème 5. Si l'on prend au contraire $\mathcal{F}(y) = y$, les mêmes formules donneront

(74) $$y + y_1 + \cdots + y_{m-1} = b + b_1 + \cdots + b_{m-1} - \frac{x}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_1 \bar{z}\, dq - \frac{x^2}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_2 \bar{z}\, dq - \text{etc.},$$

et

(75) $$y + y_1 + \cdots + y_{m-1} = b + b_1 + \cdots + b_{m-1} - x \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} ((u_1)) - x^2 \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} ((u_2)) - \text{etc.}$$

Si maintenant on suppose qu'une seule racine de l'équation (69) offre un module inférieur à $\mathbb{R}$, et que cette racine soit précisément égale à zéro, on aura $m = 1$, $b = b$, et les formules (67), (69), (70), (74), (75) se réduiront à

(76) $$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(b) + \frac{x}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_1 \bar{z}\, \mathcal{F}'(b+z)\, dq + \frac{x^2}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_2 \bar{z}\, \mathcal{F}'(b+z)\, dq + \text{etc.},$$

(77) $$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(b) - \frac{x}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_1 \bar{z}\, \mathcal{F}'(b+z)\, dq - \frac{x^2}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_2 \bar{z}\, \mathcal{F}'(b+z)\, dq - \text{etc.},$$

(78) $$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(b) - x \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((u_1)) - x^2 \sum_{(0)}^{(2k)} \sum_{(-k)}^{(k)} \mathcal{F}'(b+z)\,((u_2)) - \text{etc.},$$

(79) $$y = b - \frac{x}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{u}_1 \,\overline{z}\, \vartheta_1 - \frac{x^2}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{u}_2 \,\overline{z}\, \vartheta_1 - \text{etc.},$$

(80) $$y = b - x \underset{(0)}{\overset{(2\pi)}{\mathfrak{P}}}_{(-\pi)}^{(\pi)} (\!(u_1)\!) - x^2 \underset{(0)}{\overset{(2\pi)}{\mathfrak{P}}}_{(-\pi)}^{(\pi)} (\!(u_2)\!) - \text{etc.}$$

Les formules (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80) fournissent, sous les conditions établies auparavant, le développement des fonctions implicites de x représentées par y et $\mathcal{F}(y)$, ou par $y + y_1 + \cdots + y_{m-1}$ et $\mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(y_1) + \cdots + \mathcal{F}(y_{m-1})$ en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Observons d'ailleurs qu'une partie des formules (76) et (67) le coefficient de x^m dans le développement de $\mathcal{F}(y)$ ou de $\mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(y_1) + \cdots + \mathcal{F}(y_{m-1})$ offrira un module inférieur au module maximum du produit

$$\overline{v}_m \,\overline{z}\, \mathcal{F}(b+\overline{z})$$

qui est lui-même le coefficient de x^m dans le développement de la fonction

(81) $$\overline{z}\,\frac{\chi(x, b+\overline{z})}{f(x, b+\overline{z})}\,\mathcal{F}(b+\overline{z}).$$

On pourrait, dans les formules (76), (69), (74), (77) et dans celles que nous en avons déduites, remplacer $\mathcal{F}(y)$ par $\mathcal{F}(x, y)$, la fonction

$$\mathcal{F}(x, y) = \mathcal{F}(x, b+z)$$

étant choisie de manière à rester finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z. Alors, à la place des formules (74) et (77), on obtiendrait les suivantes

(82) $$\mathcal{F}(x, y) + \mathcal{F}(x, y_1) + \cdots + \mathcal{F}(x, y_{m-1}) = \underset{(0)}{\overset{(2\pi)}{\mathfrak{P}}}_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)}\,\mathcal{F}(x, b+z) \right) \right),$$

(83) $$\mathcal{F}(x, y) + \mathcal{F}(x, y_1) + \cdots + \mathcal{F}(x, y_{m-1}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \overline{z}\,\frac{\chi(x, b+\overline{z})}{f(x, b+\overline{z})}\,\mathcal{F}(x, b+\overline{z})\,\vartheta_1,$$

dont la dernière, combinée avec la formule (6), donnerait

(84) $$\mathcal{F}(x, y) + \mathcal{F}(x, y_1) + \cdots + \mathcal{F}(x, y_{m-1}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{z}\,\overline{z}}{\overline{z}-x}\,\frac{\chi(\overline{x}, b+\overline{z})}{f(\overline{x}, b+\overline{z})}\,\mathcal{F}(\overline{x}, b+\overline{z})\,\vartheta_1\vartheta_1.$$

Lorsque le nombre m se réduit à l'unité, l'équation (84) devient

$$(85) \qquad \mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\bar{z}}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}\,\mathcal{F}(\bar{x},b+\bar{z})\,\partial p\,\partial q .$$

Or, en vertu des formules (84), (85), le terme général de la série qui représentera le développement de $\mathcal{F}(x,y)$ ou de la fonction

$$\mathcal{F}(x,y)+\mathcal{F}(x,y_1)+\cdots+\mathcal{F}(x,y_{m-1})$$

suivant les puissances ascendantes de x, et le reste de cette série offriront des modules respectivement inférieurs à ceux du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme

$$(86) \qquad \frac{Xz}{X-x}\,\Lambda\,\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}\,\mathcal{F}(\bar{x},b+\bar{z}).$$

Lorsque, dans la formule (84) on fait successivement $\mathcal{F}(x,y)=1$, $\mathcal{F}(x,y)=y$, on en conclut

$$(87) \qquad y+y_1+\cdots+y_{m-1} = mb+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}\bar{z}^2}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}\,\partial p\,\partial q,$$

puis, en supposant $m=1$,

$$(88) \qquad y = b+\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}\bar{z}^2}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}\,\partial p\,\partial q .$$

Donc le terme général et le reste de la série qui représentera le développement de y ou de $y+y_1+\cdots+y_{m-1}$ suivant les puissances ascendantes de x, offriront des modules respectivement inférieurs à ceux du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme

$$(89) \qquad \frac{Xz^2}{X-x}\,\Lambda\,\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}.$$

Si l'on désigne par V_n le coefficient de x^n dans la série que l'on obtient en développant suivant les puissances ascendantes de x le second membre de l'équation (85), on aura évidemment, pour $n>0$,

$$(90) \qquad V_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\partial^n\left\{\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}\,\mathcal{F}(x,b+\bar{z})\right\}}{\partial x^n}\,\partial q ,$$

ou, ce qui revient au même

$$(g1)\qquad U_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\,\frac{(z)}{(0)}\mathcal{D}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\partial^n\left\{\frac{\chi(x,b+z)}{\mathcal{F}(x,b+z)}\,\mathcal{F}(x,b+z)\right\}}{\partial x^n}\right)\right),$$

la variable x devant être réduite à zéro après les différentiations, et le signe $\mathcal{D}$ se rapportant à la variable z. On trouvera pareillement, pour $n=0$,

$$(g2)\qquad U_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z\,\frac{\chi(0,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\,\mathcal{F}(0,b+z)\,\partial\theta,$$

ou, ce qui revient au même,

$$(g3)\qquad U_0 = \frac{(z)}{(0)}\mathcal{D}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(0,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\,\mathcal{F}(0,b+z)\right)\right).$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\frac{\chi(x,b+z)}{\mathcal{F}(x,b+z)} = \frac{\chi(0,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)} + \frac{\partial 1\,\frac{\mathcal{F}(x,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}}{\partial z},$$

on pourra encore aussi former (g0), (g1) subsitituer les suivantes

$$(g4)\qquad U_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\chi(0,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\,\frac{\partial^n\mathcal{F}(x,b+z)}{\partial x^n}\,\partial\theta - \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^n\left(1\,\frac{\mathcal{F}(x,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}(x,b+z)}{\partial z}\right)}{\partial x^n}\,\partial\theta,$$

$$(g5)\qquad U_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{(z)}{(0)}\mathcal{D}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(0,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\,\frac{\partial^n\mathcal{F}(x,b+z)}{\partial x^n}\right)\right) - \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{(z)}{(0)}\mathcal{D}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\partial^n\left(1\,\frac{\mathcal{F}(x,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}(x,b+z)}{\partial z}\right)}{\partial x^n}\right)\right).$$

Lorsqu'une seule racine de l'équation (fg) offre un module inférieur à Z_1 et que cette racine est précisément zéro, les formules (g2), (g1), (g5) donnent simplement

$$(g6)\qquad U_0 = \mathcal{F}(0,b)$$

$$(g7)\qquad U_n = \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^{n-1}\left\{z^n\,\frac{\partial^n\left(1\,\frac{\chi(x,b+z)}{\mathcal{F}(x,b+z)}\,\mathcal{F}(x,b+z)\right)}{\partial x^n}\right\}}{\partial z^{n-1}},$$

et

$$(g8)\qquad U_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^n\mathcal{F}(x,b)}{\partial x^n} - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^{n-1}\left\{z^n\,\frac{\partial^n\left(1\,\frac{\mathcal{F}(x,b+z)}{\mathcal{F}(0,b+z)}\cdot\frac{\partial\mathcal{F}(x,b+z)}{\partial z}\right)}{\partial x^n}\right\}}{\partial z^{n-1}}$$

les variables x et z devant être réduites à zéro, après les différentiations effectuées. Alors aussi l'équation (hh) n'admet qu'une seule racine z dont le module soit inférieur à Z_1, et la série qui

a pour terme général $U_n x^n$ est le développement de la fonction

$$\Gamma(x,y) = F(x, b+z).$$

Lorsque celles des racines de l'équation (89) qui offrent des modules inférieurs à Z sont toutes égales entre elles et se réduisent à zéro, alors en nommant toujours u_n le coefficient de x^n dans le développement de l'expression (70), et désignant par N le nombre des racines nulles de l'équation

(99) $$\frac{1}{u_n} = 0,$$

outre les formules (92), (94), (95)

(100) $$U_0 = m F(a, b),$$

(101) $$U_n = \frac{1}{1.2\ldots(N-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{\partial^{N-1}\left\{ z^N \frac{\partial^n \left(\frac{X(x, b+z)}{F(x, b+z)} F(x, b+z) \right)}{\partial x^n} \right\}}{\partial z^{N-1}},$$

et

(102) $$U_n = \frac{m}{1.2\ldots n} \frac{\partial^n F(x, b)}{\partial x^n} - \frac{1}{1.2\ldots(N-1)} \frac{1}{1.2\ldots n} \frac{\partial^{N-1}\left\{ z^N \frac{\partial^n \left(\frac{1}{F(x, b+z)} \frac{\partial F(x, b+z)}{\partial z} \right)}{\partial x^n} \right\}}{\partial z^{N-1}},$$

x et z devant être réduits à zéro après les différentiations. Alors aussi la série qui a pour terme général $U_n x^n$ est le développement de la fonction

$$\Gamma(x, y) + \Gamma(x, y_1) + \ldots + \Gamma(x, y_{n-1})$$

$y, y_1, \ldots y_{n-1}$ représentant celles des racines de l'équation (42) qui correspondent à des modules de z plus petits que Z.

Si, dans les formules (96), (98), on remplace $\Gamma(x, y)$ par $\Gamma(y)$, elles donneront simplement

(103) $$U_0 = \Gamma(b),$$

(104) $$U_n z = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \frac{\partial^{n-1}\left(z^n u_n \Gamma(b+z) \right)}{\partial z^{n-1}},$$

et l'on aura par suite

(105) $\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(b) - x\,[2u_1]\,\mathcal{F}'(b) - \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{\partial\,[z^2 u_2 \mathcal{F}'(b+z)]}{\partial z} - \frac{x^3}{1\cdot 2}\frac{\partial^2[z^2 u_2 \mathcal{F}'(b+z)]}{\partial z^2}$ - etc...,

ou, ce qui revient au même,

(106) $$\mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(b) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(n-1)} \frac{\partial^{n-1}[z^n u_n \mathcal{F}'(b+z)]}{\partial z^{n-1}},$$

pourvu que, dans tous les termes du second membre on réduise z à zéro, après les différentiations. On trouvera, sous la même condition des formules (99) et (104)

(107) $$\mathcal{F}(y) + \mathcal{F}(y_1) + \cdots + \mathcal{F}(y_{m-1}) = m\mathcal{F}(b) - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(N-1)} \frac{\partial^{N-1}[z^N u_n \mathcal{F}'(b+z)]}{\partial z^{N-1}}.$$

Si l'on réduit $\mathcal{F}(y)$ à y, les équations (106), (107) deviendront

(108) $$y = b - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(n-1)} \frac{\partial^{n-1}(z^n u_n)}{\partial z^n},$$

(109) $$y + y_1 + \cdots + y_{m-1} = mb - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(N-1)} \frac{\partial^{N-1}(z^N u_n)}{\partial z^{N-1}}.$$

Les équations (106), (107), (108), (109) coïncident avec les formules (78), (77), (80) et (75).

En résumant ce qui précède, on obtient la proposition suivante

<u>5e Théorème</u>. Si les conditions énoncées dans le 4e théorème sont remplies, la fonction implicite de x représentée par y, et déterminée par l'équation (82), ou la somme des fonctions implicites représentées par $y, y_1, \ldots y_{m-1}$ pourra être développé à l'aide des formules (79), (80), (74), (75), ou, ce qui revient au même, à l'aide des formules (90), (91), (92), (93), en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Si de plus la fonction $\mathcal{F}(x,y) = \mathcal{F}(x, b+z)$ reste toujours finie et continue pour des valeurs de x et de z respectivement inférieures à X et à Z, cette fonction ou la somme

$$\mathcal{F}(x,y) + \mathcal{F}(x,y_1) + \cdots + \mathcal{F}(x, y_{m-1})$$

pourra encore être développé, à l'aide des formules (90), (91), (92), (93),

en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Ajoutons que les modules du terme général et du reste seront inférieurs, dans la première série aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression (89), et, dans la seconde série aux modules du terme général et du reste de la progression géométrique qui a pour somme l'expression (86).

Scholie. On peut assigner à X et à Z une infinité de systèmes de valeurs qui remplissent les conditions énoncées dans les théorèmes 4 et 5. Mais, parmi ces systèmes il en est un dans lequel la valeur de X est la plus grande possible. Cette plus grande valeur de X est évidemment une limite au-dessous de laquelle on peut faire varier arbitrairement le module de x, tandis que les fonctions y, $F(x,y)$, ou $y+y_1+\cdots+y_{m-1}$, $F(x,y)+F(x,y_1)+\cdots+F(x,y_{m-1})$ cessent d'être développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x.

Lorsque, dans la formule (102), les nombres N, n deviennent égaux entre eux, la valeur de U_n se réduit à

$$(110)\qquad U_n = \frac{m}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^n \Psi(x,b)}{\partial x^n} - \frac{1}{1.2\ldots(n-1)}\,\frac{1}{1.2\ldots n}\,\frac{\partial^{n-1}\left\{z^n \dfrac{\partial^n\left(\dfrac{1}{f(x,z+b)}\cdot\dfrac{\partial F(x,z+b)}{\partial z}\right)}{\partial z^n}\right\}}{\partial z^{n-1}},$$

les variables x et z devant toujours être anéanties après les différentiations. M. Laplace, dans les mémoires de l'Académie Royale des Sciences pour l'année 1777, a énoncé, sans démonstration un théorème en vertu duquel la précédente valeur de U_n serait le coefficient de x^n dans le développement de l'un des produits

$$m\,F(x,y),\quad m\,F(x,y_1),\quad \ldots\quad m\,F(x,y_{m-1}).$$

Mais ce théorème, comme l'a observé M. Poisson est évidemment inexact, tant que l'on suppose $m>1$. Il redevient exact, et s'accorde avec la formule (98) dans le cas où l'on a $m=1$. Dans ce dernier cas,

M. Paoli est parvenu à démontrer le même théorème de plusieurs manières, mais en supposant tacitement que la fonction implicite $Y(x,y)$ est développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Il importait de rechercher dans quels cas le développement peut avoir lieu, sous quelles conditions la formule (98) subsiste, et quelles sont les limites de l'erreur commise quand on arrête le développement après un certain nombre de termes. Le 5e théorème et le scholie qui le suit peuvent servir à résoudre ces différentes questions. Quant à la valeur de U_n que détermine l'équation (110), M. Paoli la présente comme exprimant le coefficient de x^n dans le développement de la somme

$$Y(x,y) + Y(x,y_1) + \cdots + Y(x,y_{m-1}),$$

ce qui cesse d'être vrai, lorsqu'on a $N > n$. Alors à la formule (110) il faudrait nécessairement substituer la formule (102). C'est ce dont on peut aisément s'assurer en appliquant les formules (102) et (110) au développement de la fonction

$$Y(x,y) + Y(x,y_1) + Y(x,y_2), \tag{111}$$

y, y_1, y_2 étant les racines d'une équation du 3e degré. En effet la formule (110) a conduit M. Paoli à un résultat exact, lorsque l'équation du troisième degré était

$$(y-b)^3 - x^3(ay+c)^3 = 0, \tag{112}$$

a, b, c désignant des quantités constantes. Mais la même formule ne serait plus applicable, si à l'équation (112) on substituait la suivante

$$(y-b)^3 - x(ay+c)^3 = 0. \tag{113}$$

On pourrait généraliser encore les résultats auxquels nous sommes parvenus. En effet, si l'on désigne par ω un module de la variable x inférieur à X, et par

$$\underline{x} = x_0 e^{\mu\sqrt{-1}}$$

ce que devient π quand on y remplace X par x_0, on tirera de la formule (11)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi(\overline{z}) - \varphi(\underline{z}) \right) \vartheta\psi = 2\pi^2 \sum_{(m)} \sum_{(n)}^{(\infty)} \left\| \frac{f(x)}{x} \right\|. \tag{11b}$$

Or, si l'on substitue la formule (11b) à la formule (11), on obtiendra, au lieu du 5e théorème la proposition suivante

6e Théorème. Soit m le nombre des racines de l'équation (15) qui offrent des modules compris entre les limites z_0, Z_0; z_0 étant $< Z$. Désignons de plus $\overline{z}, \underline{z}$ deux expressions imaginaires de la forme

$$\overline{z} = Z_0 e^{\psi\sqrt{-1}}, \qquad \underline{z} = z_0 e^{\psi\sqrt{-1}};$$

et supposons 1° que, pour des modules de x inférieurs à X, et pour des modules de z inférieurs à Z_0, la fonction $f(x, b+z)$ obtienne toujours une valeur unique et déterminée, 2° que, pour tout module de x inférieur à X, les deux rapports

$$\frac{\chi(x, b+\overline{z})}{f(x, b+\overline{z})}, \qquad \frac{\chi(x, b+\underline{z})}{f(x, b+\underline{z})}$$

soient développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Pour un semblable module de x, l'équation (14) offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront compris entre les limites z_0, Z_0; et, si l'on désigne par $y, y_1, \dots y_{m-1}$ les valeurs de y correspondantes à ces racines, la fonction y ou la somme

$$y + y_1 + \dots + y_{m-1}$$

sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. D'ailleurs la fonction

$$\mathrm{I}(x, y) = \mathrm{I}(x, b+z)$$

reste toujours finie et continue, pour des modules de x inférieurs à X, et pour des modules de z renfermés entre les limites z_0, Z_0; cette fonction $\mathrm{I}(x, y)$ ou la somme

$$\mathrm{I}(x, y) + \mathrm{I}(x, y_1) + \dots + \mathrm{I}(x, y_{m-1})$$

sera encore développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, tant que le module de x demeurera inférieur à X.

Ajoutons que, pour appliquer les formules (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80), etc. ou (90), (91), (92), (93) au développement d'une fonction et de sa dérivée, il suffira de remplacer, dans ces formules les fonctions de z, placées sous le signe $\int$, par les différences entre ces mêmes fonctions et les fonctions semblables de $\frac{1}{2}$, ou le symbole $\overset{(z_0)}{\underset{(z)}{\Delta}} f^{(k)}(z)$ par le symbole $\overset{(z_0)}{\underset{(z_0)}{\Delta}} f^{(k)}(z)$.

Pour montrer une application des principes ci-dessus établis, supposons

$$f(x,y) = \Pi(y) + x\,\varpi(y). \tag{115}$$

Les conditions énoncées dans le théorème 5 se trouveront remplies, si les trois fonctions

$$\Pi(b+z),\quad \varpi(b+z),\quad F(x,b+z)$$

restent finies et continues pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, le rapport

$$\frac{1}{\Pi(b+\overline{z}) - x\,\varpi(b+\overline{z})} \tag{116}$$

est développable pour tout module de x inférieur à X, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. Cette dernière condition se trouvera elle-même vérifiée, si l'on a

$$X \Lambda \frac{\varpi(b+\overline{z})}{\Pi(b+\overline{z})} = \text{ou} < 1. \tag{117}$$

D'autre part, si le module Z de $\overline{z}$ est choisi de manière que la quantité

$$\Lambda \frac{\varpi(b+\overline{z})}{\Pi(b+\overline{z})} \tag{118}$$

acquiert la plus grande valeur possible, cette quantité deviendra ce que nous avons nommé le module principal de la fonction

$$\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}, \tag{119}$$

et en désignant par M ce module principal, on réduira la condition (117) à

$$X = \text{ou} < \frac{1}{M}. \tag{120}$$

Depuis l'équation (59) deviendra

$$\Pi(b+z) = 0, \tag{121}$$

et l'on trouvera

$$1 \quad \frac{\vartheta(x, b+z)}{\vartheta(0, b+z)} = 1\left\{1 - x\,\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}\right\} = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n}\left(\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^n,$$

par conséquent

$$u_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^n, \tag{122}$$

et

$$v_n = \frac{1}{\Pi(b+z)}\left\{\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}\,\Pi'(b+z) - \vartheta'(b+z)\right\}\left(\frac{\vartheta(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^{n-1}. \tag{123}$$

Enfin l'expression (66) deviendra

$$\frac{X Z_1}{X - x}\,\Lambda\,\frac{\Pi'(b+\bar z) - \bar x^{\nu}\,\vartheta'(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z) - \bar x\,\vartheta(b+\bar z)}\,\Sigma'(\bar x, b+\bar z), \tag{124}$$

et la suite de la progression géométrique produite par le développement de cette expression en une série ordonnée suivant les puissances de x sera

$$\frac{x^n Z_1}{X^{n+1}(X-x)}\,\Lambda\,\frac{\Pi'(b+\bar z) - \bar x\,\vartheta'(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z) - \bar x\,\vartheta(b+\bar z)}\,\Sigma'(\bar x, b+\bar z).$$

Donc si l'on nomme γ le module de x, le reste de la série que représentera le développement de la fonction $\Sigma(x,y)$ sera de la forme

$$\Sigma(x,y) - \Sigma'(x, y_1) - \cdots - \Sigma'(x, y_{n-1})$$

offrira un module inférieur au produit

$$\frac{\gamma^n Z_1}{X^{n+1}(X-\gamma)}\,\Lambda\,\frac{\Pi'(b+\bar z) - \bar x\,\vartheta'(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z) - \bar x\,\vartheta(b+\bar z)}\,\Sigma'(\bar x, b+\bar z), \tag{125}$$

et à plus forte raison, au produit

$$\frac{\xi^n Z_i}{X^{n-1}(X-\xi)} \frac{\Lambda\Pi'(b+z) + X\Lambda\varpi'(b+z)}{1-X\Lambda\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}} \Lambda \frac{\Gamma(\pi, b+z)}{\Pi(b+z)}. \tag{126}$$

Si l'on prend pour Z_i celui des modules de z qui correspond au module principal de la fonction (119), l'expression (126) deviendra

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \frac{\Lambda\Pi'(b+z) + X\Lambda\varpi'(b+z)}{1-MX} \Lambda \frac{\Gamma(\pi, b+z)}{\Pi(b+z)}. \tag{127}$$

Cela posé, on déduira immédiatement du théorème 6° la proposition suivante :

7e Théorème. Soit M le module principal de la fonction

$$\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)},$$

Z_i le module correspondant de z, ou un module plus petit, et X un nombre égal ou inférieur à $\frac{1}{M}$. Supposons d'ailleurs que les fonctions

$$\varpi(b+z), \quad \Pi(b+z)$$

restent finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z_i. Enfin soit m le nombre des racines de l'équation

$$\Pi(b+z) = 0$$

qui offrent des modules inférieurs à Z_i. Pour un module de π plus petit que $\frac{1}{M}$, l'équation

$$\Pi(b+z) + \pi\varpi(b+z) = 0$$

offrira elle-même un nombre m de racines dont les modules seront inférieurs à Z_i; et, si, en désignant par $y, y_1, y_2, \ldots y_{m-1}$ les racines de $y = b+z$ correspondantes à ces racines, on pose

$$f(\pi, y) = \Pi(y) + \pi\varpi(y),$$

la fonction y, ou la somme

$$y + y_1 + \cdots + y_{m-1}$$

sera développable en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x. De plus, si la fonction

$$F(x,y) = F(x, b+z)$$

reste elle même finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à X et à Z, $F(x,y)$ ou la somme

$$F(x,y) + F(x,y_1) + \cdots + F(x,y_{m-1})$$

sera encore développable par les formules (92) et (94) ou (92) et (98) en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x; et le reste de cette série offrira un module inférieur à chacun des expressions (128), (126), (127).

Si l'on remplace $F(x,y)$ par $F(y)$, les formules (124), (125), combinées avec les formules (65) et (122) donneront

$$(124)\quad F(y) + F(y_1) + \cdots + F(y_{m-1}) = F(b) + F(b_1) + \cdots + F(b_{m-1}) + \sum_{n=1}^{n=\infty} x^n \sum_{(0)}^{(\pi)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\frac{F(b+z)}{\Pi(b+z)} \left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \Pi'(b+z) - \varpi'(b+z) \right) \left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right)^{n-1} \right),$$

et

$$(129)\quad F(y) + F(y_1) + \cdots + F(y_{m-1}) = F(b) + F(b_1) + \cdots + F(b_{m-1}) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{(0)}^{(2\pi)} \sum_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right)^n F'(b+z) \right).$$

Concevons maintenant que l'on pose $x = 1$, et que, dans le théorème 6, on remplace $f(x,y)$ par

$$f(y) = \Pi(y) + \varpi(y);$$

alors on obtiendra la proposition suivante.

4e Théorème. Soit

$$(130)\quad f(y) = 0$$

une équation algébrique, b une valeur particulière de y, Z une valeur

ou transcendante

particulière du module de la variable

$$z = y - b,$$

et ζ la valeur imaginaire de z qui correspond au module Z_1. Supposons en outre que l'on partage la fonction $f(y)$ en deux parties

$$\Pi(y), \quad \varpi(y),$$

et soit m le nombre des racines de l'équation

$$\Pi(y) = 0 \tag{131}$$

qui produisent des modules de z inférieurs à Z_1. Si le nombre Z est choisi de manière que les fonctions

$$\Pi(b+z), \quad \varpi(b+z)$$

restent finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z, on aura

$$\Lambda \frac{\varpi(b+\zeta)}{\Pi(b+\zeta)} < 1, \tag{132}$$

l'équation (130) offrira elle-même un nombre m de racines correspondantes à des modules de z plus petits que Z. Désignons par $y, y_1, \dots y_{m-1}$ ces racines, et par $\zeta, \zeta_1, \dots \zeta_{m-1}$ les racines analogues de l'équation (131). La fonction implicite y, si l'on a $m=1$, ou la somme $y + y_1 + \dots + y_{m-1}$, dans le cas contraire, sera développable en une série convergente par la formule

$$y + y_1 + \dots + y_{m-1} = \zeta + \zeta_1 + \dots + \zeta_{m-1} + \sum_{(0)}^{(Z)} \sum_{(-\infty)}^{(\infty)} \left\| \frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right\| + \sum_{(0)}^{(Z)} \sum_{(-\infty)}^{(\infty)} \left\| \left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right)^2 \right\| + \text{etc.}, \tag{133}$$

qui se déduit immédiatement des formules (79) et (132), ou de l'équation (129). Si depuis la fonction

$$F(y) = F(b+z)$$

reste elle-même finie et continue pour des modules de z inférieurs à Z_1, $F(y)$ ou la somme $F(y) + F(y_1) + \dots + F(y_{m-1})$ pourra encore être développée en

en série convergente par la formule

$$\Sigma(y)+\Sigma(y_1)+\cdots+\Sigma(y_{m-1}) = \Sigma(b)+\Sigma(b_1)+\cdots+\Sigma(b_{m-1}) + \sum_{(0)}^{(\infty)}\sum_{(-\infty)}^{(\infty)}\left(\left(\frac{\varpi(b+2\iota)}{\Pi(b+2\iota)}\right)^{\mu}\Sigma'(b+2\iota)\right) + \frac{1}{2}\sum_{(0)}^{(\infty)}\sum_{(-\infty)}^{(\infty)}\left(\left(\frac{\varpi(b+2\iota)}{\Pi(b+2\iota)}\right)^{\mu}\Sigma'(b+2\iota)\right) + \text{etc.}\ldots \tag{194}$$

Enfin le reste de cette dernière série offrira un module inférieur à

$$\frac{Z}{X^{m-1}(X-1)}\,\Lambda\,\frac{\Pi'(b+\bar z)-\bar\varpi\,\varpi'(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z)-\bar\varpi\,\varpi'(b+\bar z)}\,\Sigma'(b+\bar z), \tag{195}$$

et à plus forte raison à

$$\frac{Z}{X^{m-1}(X-1)}\,\frac{\Lambda\,\Pi'(b+\bar z)+X\,\Lambda\,\varpi'(b+\bar z)}{1-X\,\Lambda\,\dfrac{\varpi(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z)}}\,\Lambda\,\frac{\Sigma'(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z)}, \tag{196}$$

le module X de $\bar\omega$ étant choisi de manière à remplir les deux conditions

$$X-1>0, \qquad 1-X\,\Lambda\,\frac{\varpi(b+\bar z)}{\Pi(b+\bar z)}>0\ ; \tag{197}$$

et ce module étant pour toute valeur plus grand que l'unité, mais plus petit que

$$\Lambda'\,\frac{\Pi(b+\bar z)}{\varpi(b+\bar z)}.$$

Lorsque une seule racine de l'équation (191) correspond à un module de z plus petit que Z_1, et que cette racine est précisément b, on a

$$m=1, \quad \rho=b,$$

et les formules (192), (194) se réduisent à

$$y=b+\frac{1}{1}\,\frac{2\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}+\frac{1}{1.2}\,\frac{\partial.\left(\frac{2\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2}{\partial z}+\text{etc.}\ldots, \tag{198}$$

$$\Sigma(y)=\Sigma(b)+\frac{1}{1}\,\frac{2\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\,\Sigma'(b+z)+\frac{1}{1.2}\,\frac{\partial\left\{\left(\frac{2\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2\Sigma'(b+z)\right\}}{\partial z}+\text{etc.}\ldots, \tag{199}$$

lesquelles devront être, dans tous les termes des seconds membres, annullées après les différentiations.

Si l'on pose, dans la formule (115),

$$\Pi(y)=y-b, \tag{200}$$

$y=b$ sera la seule racine de l'équation (191). Alors les formules (198), (199) deviendront

(141) $$F'(y) = F'(b) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots n} \frac{\partial^n \left\{ (\varpi(b))^n F'(b) \right\}}{\partial b^n} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2\ldots(n-1)} \frac{\partial^{n-1} \left\{ (\varpi(b))^{n-1} \varpi'(b) F'(b) \right\}}{\partial b^{n-1}},$$

et

(142) $$\Pi'(y) = \Pi'(b) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1.2.3\ldots n} \frac{\partial^{n-1} \left\{ (\varpi(b))^n \Pi'(b) \right\}}{\partial b^{n-1}},$$

ou, ce qui revient au même,

(143) $$\Pi(y) = \Pi(b) + \frac{x}{1} \varpi(b) \Pi'(b) + \frac{x^2}{1.2} \frac{\partial \{(\varpi(b))^2 \Pi'(b)\}}{\partial b} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots,$$

puis on en conclurra, en posant $\Pi(y) = y$,

(144) $$y = b + \frac{x}{1} \varpi(b) + \frac{x^2}{1.2} \frac{\partial \{\varpi(b)\}^2}{\partial b} + \frac{x^3}{1.2.3} \frac{\partial^2 \{\varpi(b)\}^3}{\partial b^2} + \text{etc.} \ldots$$

Daplus, on aura, en vertu des formules (96) et (97),

(145) $$F(x, y) = F(0, b) + \sum_{n=1}^{n=\infty} U_n z^n$$

la valeur de U_n étant

(146) $$U_n = \frac{n x^n}{(1.2.3\ldots n)^2} \frac{\partial^{n-1} \left\{ z^n \frac{\partial^n \left\{ \frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z) \right\}}{\partial x^n} \right\}}{\partial z^{n-1}},$$

et les variables x, z devant être anéanties après les différentiations effectuées. On peut remarquer d'ailleurs que, pour obtenir la formule (144), il suffit de développer suivant les puissances ascendantes de x le second membre de l'équation (82), qui, dans le cas présent, se réduit à

(147) $$F(x, y) = \begin{matrix} (x) \\ (0) \end{matrix} \mathfrak{D}_{(-z)}^{(x)} \left(\frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z) \right).$$

On pourrait y parvenir encore à l'aide de la formule (80) ou

(148) $$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Sigma \frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z)\, dq.$$

Les formules (144), et, (143) sont précisément celles que Lagrange a données comme pouvant servir à développer suivant les puissances ascendantes de x une racine y de l'équation

(149) $$y - b - x\varpi(y) = 0,$$

et une fonction $\Pi(y)$ de cette racine. On, d'après le 7ème théorème, ces formules subsistent, si les fonctions $\varpi(b+z)$, $\Pi(b+z)$ restent finies et continues pour des modules de z inférieurs à Z_1, Z_1 étant celui des modules de z qui correspond au module principal M de la fonction

$$\frac{\varpi(b+z)}{z}, \tag{150}$$

et si d'ailleurs on attribue à la variable réelle ou imaginaire x une valeur dont le module soit inférieur à $\frac{1}{M}$. Alors substituant à $f(x)$ si, le module Z_1 de z étant distinct de celui qui correspond au module principal de la fonction (150), on choisit le module ξ de x de manière à vérifier la condition

$$\xi \Lambda \frac{\varpi(b+\xi)}{\xi} < 1. \tag{151}$$

Quant à la fonction $F(x,y) = \Pi(x, b+z)$ que renferme l'équation (145), elle devra rester encore finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs à ξ et à Z_1. Ajoutons qu'à l'aide des formules (129), (126), (127) on déterminera deux series des limites supérieures aux modules des restes des séries (162), (166), ou même de la série proposée par le développement de $\Pi(x,y)$ suivant les puissances ascendantes de x. Effectivement, en vertu des formules (125), (126), le dernier de ces restes offrira un module inférieur à chacun des nombres

$$\frac{\xi^n Z_1}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{1 - \bar{z}\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z} - \bar{z}\varpi(b+\bar{z})} \Pi(\bar{z}, b+\bar{z}), \tag{152}$$

$$\frac{\xi^n Z_1}{X^{n-1}(X-\xi)} \frac{1 + X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{Z_1 - X\Lambda\varpi(b+\bar{z})} \Lambda \Pi(\bar{z}, b+\bar{z}), \tag{153}$$

le module X de $\bar{z}$ étant supérieur au module ξ de x, mais inférieur au quotient qu'on obtient en divisant l'unité par le rapport

$$\Lambda \frac{\vec{\omega}(b+\bar{z})}{\bar{z}} = \frac{\Lambda\, \vec{\omega}(b+\bar{z})}{z}. \tag{154}$$

Concevons, pour fixer les idées, que la constante b étant réelle, on prenne

$$\vec{\omega}(y) = \sin y.$$

Si l'on nomme B un arc renfermé entre les limites $0, \frac{\pi}{2}$, et choisi de manière que $\cos B$ soit égal au sujet pris à $\cos b$, on aura, en vertu des formules (24),

$$\Lambda \sin(b+\bar{z}) = \rho \cos\left(\frac{\bar{z}-\bar{z}^{-1}}{2}\cos B + \frac{\bar{z}+\bar{z}^{-1}}{2}\sin B\right). \tag{155}$$

Il y aplus. Le carré du module de $\sin(b+\bar{z})$ étant le quart du trinome

$$e^{2z\sin q} + e^{-2z\sin q} - 2\cos(2b+2z\cos q),$$

et par conséquent le quart de la somme qu'on obtient en ajoutant le trinome

$$e^{2z\sin q} + e^{-2z\sin q} - 2\cos(2z\cos q)$$

dont le maximum est $\frac{1}{4}(\Lambda \sin\bar{z})^2 = \left(\frac{\bar{z}-\bar{z}^{-1}}{2}\right)^2$ augmenté

$$\frac{1}{2}\left[\cos(2z\cos q) - \cos(2b+2z\cos q)\right] = \Lambda\sin b \sin(b+2z\cos q)$$

dont le maximum est $\Lambda\sin B$, on trouvera encore

$$\Lambda \sin(b+\bar{z}) = \rho \cos\left\{\left(\frac{\bar{z}-\bar{z}^{-1}}{2}\right)^2 + \sin B\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{156}$$

Donc la condition (151) sera vérifiée, si l'on a

$$\rho < \frac{z}{\left\{\left(\frac{\bar{z}-\bar{z}^{-1}}{2}\right)^2 + \sin B\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{157}$$

et à plus forte raison, si l'on a

$$\rho < \frac{2z}{e^{\bar{z}} + e^{-\bar{z}}}, \tag{158}$$

puisque $\sin\beta$ ne peut surpasser l'unité. D'ailleurs la valeur minimum du rapport

$$\frac{2Z}{e^{Z}+e^{-Z}} \tag{159}$$

correspond à la valeur de Z déterminée par la formule

$$\frac{e^{Z}-e^{-Z}}{1} = \frac{e^{Z}+e^{-Z}}{Z} = \frac{2}{\sqrt{Z^2-1}}; \tag{160}$$

et, comme on a

$$\frac{e^{Z}+e^{-Z}}{2} - Z\,\frac{e^{Z}-e^{-Z}}{2} = 1 - \frac{Z^2}{2} - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{Z^4}{4} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\frac{Z^6}{6} - \cdots,$$

la formule (160) pourra être réduite à

$$1 = \tfrac{1}{2}Z^2 + \tfrac{1}{8}Z^4 + \text{etc.} \ldots \tag{161}$$

De l'équation (161), dont le second membre croît avec Z^2, et se réduit, pour $Z=1$, à

$$1 - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{2,7182\,8\ldots},$$

admet évidemment une seule racine positive supérieure à l'unité, mais inférieure à la racine positive de l'équation

$$1 = \tfrac{1}{2}Z^2 + \tfrac{1}{8}Z^4,$$

c'est à dire à

$$\sqrt{-2+\sqrt{12}} = 1,2100\ldots.$$

Donc, si l'on pose, dans la formule (160),

$$Z = 1,2 + i, \tag{162}$$

i surpassera $-0,2$, et sera inférieur à $0,01$. Mais alors cette formule donnera

$$\frac{2,2+i}{0,2+i}\,e^{-2,4} = e^{2i} = 1 + 2ie^{2i},$$

d'où l'on tirera successivement

$$i = -\frac{0,2 - 2,2e^{-2,4}}{1 - e^{-2,4} + (0,4+2i)e^{2i}} = -\frac{0,0004209\ldots}{0,9099\ldots + (0,4+2i)e^{2i}}. \tag{163}$$

Donc i sera négatif et renfermé entre les limites

$$-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots} = -0,0004624\ldots, \quad -\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots + 0,4} = -\frac{0,0004205\ldots}{1,30928\ldots} = -0,0003211\ldots,$$

ou, même entre la limite $-0,0003211\ldots$ et la suivante

$$-\frac{0,0004205\ldots}{0,90928\ldots + (0,4 - 0,0009248\ldots)e^{-0,0009248\ldots}} = -\frac{0,0004205\ldots}{1,30798\ldots} = -0,0003216\ldots$$

On aura donc, en poussant l'approximation jusqu'aux millionièmes inclusivement

$$i = -0,0003211\ldots, \quad Z_1 = 1,2 + i = 1,199678\ldots, \quad Z_1^2 = 1,439227\ldots,$$

$$\frac{2Z_1}{e^{Z_1} + e^{-Z_1}} = \sqrt{Z_1^2 - 1} = 0,662742\ldots;$$

et, par suite, si l'on prend

$$Z_1 = 1,199678\ldots, \tag{164}$$

la condition (158) se trouvera réduite à

$$\xi < 0,662742\ldots; \tag{165}$$

Donc, tant que le module de x ne surpassera pas le nombre $0,662742\ldots$, une seule racine de l'équation

$$y = b + x\theta(y) \tag{166}$$

pourra avoir une valeur de $y - b$ dont le module restera inférieur à $1,199678\ldots$, et cette racine sera développable par la formule de Lagrange en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x.

Considérons maintenant une fonction de x et de y, savoir,

$$F(x, y) = F(x, b + z).$$

Cette fonction sera encore développable par les formules (145), (146), suivant les puissances ascendantes de x, si elle reste finie et continue pour des modules de x et de z respectivement inférieurs aux nombres

$$0,662742\ldots, \text{ et } 1,199678\ldots$$

Il y a plus : le développement dont il s'agit pourra être effectué à l'aide des formules (167) ou (168), si la fonction explicite

$$\frac{1-x\cos(b+z)}{2-x\cos(b+z)}\,F(x,b+z) = \frac{1-x\cos(b+z)}{2-x\cos(b+z)}\,F(x,b+z) \tag{167}$$

est elle-même développable pour de telles modules des variables x et z, en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de ces variables. C'est ce qui aura lieu, par exemple, si l'on prend

$$F(x,y) = \frac{1}{1-x\cos y}.$$

Alors la formule (167) donnera

$$\frac{1}{1-x\cos y} = \overset{(2)}{\mathcal{E}}_{(0)}\overset{(\infty)}{}_{(-\infty)}\left(\!\!\left(\frac{1}{2-x\cos(b+z)}\right)\!\!\right) = \mathcal{E}\left(\!\!\left(\tfrac{1}{2}\right)\!\!\right) + x\,\mathcal{E}\left(\!\!\left(\frac{\cos(b+z)}{2^2}\right)\!\!\right) + x^2\,\mathcal{E}\left(\!\!\left(\frac{\cos^2(b+z)}{2^3}\right)\!\!\right) + \text{etc.},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{1}{1-x\cos y} = 1 + \frac{x}{1}\frac{\partial\cos b}{\partial b} + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2\cos^2 b}{\partial b^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^3\cos^3 b}{\partial b^3} + \text{etc.} \tag{168}$$

Si de cette dernière série on conserve seulement les n premiers termes, l'erreur commise ou le module du reste sera, en vertu de la formule (152), inférieur au produit

$$\frac{\xi^n z_1}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{1}{z_1 - X\Lambda\cos(b+z)}$$

et à plus forte raison au produit

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{1}{1-MX}, \tag{169}$$

M désignant le module principal de $\frac{\cos z}{z}$, déterminé par l'équation

$$M = \frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2z_1} = \frac{1}{0,662742\ldots} = 1,50888\ldots \tag{170}$$

Si, dans l'expression (169), on remplaçait $X-\xi$ par X on obtiendrait la suivante

$$\frac{\xi^n}{X^n(1-MX)} \tag{171}$$

qui représente une limite supérieure au module du terme général de la série que renferme l'équation (168). Dans l'une et l'autre expression, le nombre X doit être inférieur à $\frac{1}{M}$, mais supérieur au module ξ de la variable x. Si l'on choisit X de manière à rendre l'expression (171) un minimum, on trouvera

$$\frac{X}{n} = \frac{1 - MX}{M} = \frac{1}{(n+1)M},$$

et le produit (169) deviendra

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)M^n \xi^n}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)M\xi}.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e,$$

il est clair que le module du reste qui complète le développement de

$$\frac{1}{1 - x\cos y}$$

sera inférieur

(172) $$\frac{(n+1)e}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)M\xi} (M\xi)^n.$$

Si l'on attribue à x une valeur réelle et positive, la limite du module en question sera simplement

(173) $$\frac{(n+1)e}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)Mx} (Mx)^n.$$

Ainsi, par exemple, si l'on suppose $x = \frac{1}{4}$, elle deviendra

(174) $$\frac{(1,0647\ldots)(n+1)}{1 - \frac{0,6057\ldots}{n}} (0,37722\ldots)^n.$$

Les fonctions implicites, que nous avons jusqu'ici développées en séries, dépendaient d'une seule variable x. Mais on pourrait étendre l'application des mêmes principes à des fonctions implicites de plusieurs variables x, x', etc... Concevons, pour fixer les idées, que y, y', ...

soient déterminées en fonctions de $x, x', \ldots$ par des équations de la forme

(175) $$f(x,y)=0, \qquad f_1(x',y')=0, \quad \text{etc.}\ldots$$

Désignons par $\chi(x,y)$ la dérivée de $f(x,y)$ relative à y, par $\chi_0(x',y')$ la dérivée de $f_1(x',y')$ relative à y', etc.... , et par

$$F(x,x',\ldots y,y',\ldots)$$

une fonction de $x, x', \ldots y, y'\ldots$ Cela supposons 1° que $b, b', \ldots$ étant des constantes, les équations

(176) $$f(o,b+z)=0, \qquad f_1(o,b'+z')=0, \quad \text{etc.}\ldots$$

offrent la première m racines dont les modules soient inférieurs à Z, la seconde m' racines dont les modules soient inférieurs à $Z', \ldots$; 2° que, pour des modules de $x, x', \ldots, z, z', \ldots$ respectivement inférieurs à $X, X', \ldots$ $Z, Z', \ldots$, chacune des fonctions $f(x,b+z)$, $f_1(x',b+z')$, ... obtienne toujours des valeurs finies et déterminées, 3° que, Z étant le module de $\overline{z}$, Z' le module de $\overline{z}'$, ... les rapports

(177) $$\frac{\chi(x,b+\overline{z})}{f(x,b+\overline{z})}, \qquad \frac{\chi_1(x',b'+\overline{z}')}{f_1(x',b'+\overline{z}')}, \quad \text{etc.}\ldots$$

et le produit

(178) $$\frac{\chi(x,b+\overline{z})}{f(x,b+\overline{z})}\,\frac{\chi_1(x',b'+\overline{z}')}{f_1(x',b'+\overline{z}')}\ldots F(x,x',\ldots b+\overline{z},b'+\overline{z}',\ldots)$$

soient développables en séries ordonnées suivant les puissances et produits de x, de $x', \ldots$ pour des modules de $x, x', \ldots$ respectivement inférieurs à $X, X', \ldots$ Pour établir les modules de $x, x', \ldots$ les équations

(179) $$f(x,b+z)=0, \qquad f_1(x',b'+z')=0, \quad \text{etc.}\ldots$$

auront du théorème 4, offrant la première un nombre m de racines dont les modules seront inférieurs à Z; la seconde, un nombre m' de racines dont les modules seront inférieurs à $Z', \ldots$; et, si l'on désigne par

(180) $$S^{\overline{h}}(x,x',\ldots y,y',\ldots)$$

la somme des valeurs que reçoit la fonction $\Sigma^0(x, x', \dots y, y', \dots)$ lorsqu'on y substitue successivement au lieu de $y, y', \dots$ les racines dont il s'agit, cette somme sera développable en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, x', \dots$. C'est en effet ce que l'on démontrera sans peine de la manière suivante.

Examinons d'abord le cas particulier où l'on aurait $m=1$, $m'=1, \dots$. Alors, en vertu de la formule (183), en y remplaçant n par l'unité, et $\Sigma(x,y)$ par $\Sigma(x, x', \dots y, y', \dots)$

$$\Sigma(x, x', \dots y, y', \dots) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma\, \frac{\chi(x, b+\Sigma)}{f(x, b+\Sigma)}\, \Sigma(x, x', \dots b+\Sigma, y', \dots)\, dq. \tag{184}$$

On aura de même

$$\Sigma(x, x', \dots b+\Sigma, y', \dots) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} \Sigma'\, \frac{\chi_1(x', b+\Sigma')}{f_1(x', b+\Sigma')}\, \Sigma(x, x', \dots b+\Sigma, b+\Sigma', \dots)\, dq', \tag{185}$$

etc....

et par suite on trouvera

$$\Sigma(x, x', \dots y, y', \dots) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \dots \Sigma\, \Sigma' \dots \frac{\chi(x, b+\Sigma)}{f(x, b+\Sigma)}\, \frac{\chi_1(x', b+\Sigma')}{f_1(x', b+\Sigma')} \dots \Sigma(x, x', \dots b+\Sigma, b+\Sigma', \dots)\, \frac{dq}{2\pi i}\, \frac{dq'}{2\pi i} \dots \tag{186}$$

Si m, m' cessent de se réduire à l'unité, il faudra évidemment remplacer le premier membre de la formule (181) par la somme des valeurs que reçoit la fonction $\Sigma(x, x', \dots y, y', \dots)$ quand on y substitue successivement au lieu de y celles des racines de l'équation $f(x, b+\Sigma) = 0$ qui offrent des modules inférieurs à Z_1; puis le premier membre de la formule (182) par la somme des valeurs que reçoit la fonction $\Sigma(x, x', \dots b+\Sigma, y', \dots)$ quand on y substitue successivement au lieu de y' celles des racines de l'équation $f(x', b+\Sigma') = 0$ qui offrent des modules inférieurs à Z_1; etc.... Donc le premier membre de la formule (183) devra être linéaire remplacé par l'expression (180) qu'on aura

(184a) $$\int \mathrm{F}(x, x', \dots\ y, y', \dots)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \dots\ \bar{z}\,\bar{z}' \dots\ \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{\mathcal{F}(x, b+\bar{z})}\ \frac{\chi_1(x', b'+\bar{z}')}{\mathcal{F}(x', b'+\bar{z}')} \dots \mathrm{F}(x, x', \dots b+\bar{z},\ b'+\bar{z}', \dots)\ \frac{dq}{2\pi}\ \frac{dq'}{2\pi} \dots$$

Or, en vertu de la formule (183) ou (184), l'expression

$$\mathrm{F}(x, x', \dots y, y', \dots) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(x, x', \dots y, y', \dots)$$

qui représente une fonction implicite (du moins supposée) des variables $x, x', \dots$, deviendra transformée en une fonction entièrement explicite de ces mêmes variables, et, pour la développer en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de $x, x', \dots$ il suffira de développer en une semblable série le produit (178). Cela étant, que la limite supérieure du module de rareté qui complétera la dernière série soit en même temps une limite supérieure du module de rareté qui complétera la première. Si l'on nomme ξ le module de x, ξ' le module de $x', \dots$ et $\bar{z}, \bar{z}', \dots$ des coefficients numériques qui aient pour modules $X, X', \dots$; la limite dont il s'agit sera précisément le reste de la série qui, étant ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\xi, \xi', \dots$, a pour somme l'expression

(185) $$\frac{X}{X-\xi}\ \frac{X'}{X'-\xi'} \dots \Lambda\ \frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{\mathcal{F}(\bar{x}, b+\bar{z})}\ \frac{\chi_1(\bar{x}', b'+\bar{z}')}{\mathcal{F}_1(\bar{x}', b'+\bar{z}')} \dots \mathrm{F}(\bar{z}, \bar{x}', -b+\bar{z}, b'+\bar{z}', \dots),$$

F_1, dans le développement de la fonction

$$\mathrm{F}(x, x', \dots y, y', \dots) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}(x, x', \dots y, y', \dots)$$

suivant les puissances ascendantes de $x, x', \dots$, on négligeait tous les termes dont le degré, mesuré par la somme des exposants de $x', x', \dots$ devenait égal ou supérieur à h, l'erreur commise ou le module de rareté serait encore inférieure au produit

(186) $$\frac{A}{A^{h-1}(A-1)}\ \Lambda\ \frac{\chi(\bar{\alpha}x, b+\bar{z})}{\mathcal{F}(\bar{\alpha}x, b+\bar{z})}\ \frac{\chi_1(\bar{\alpha}'x', b'+\bar{z}')}{\mathcal{F}_1(\bar{\alpha}'x', b'+\bar{z}')} \dots \mathrm{F}(\bar{\alpha}x, \bar{\alpha}'x', -b+\bar{z}, b'+\bar{z}', \dots),$$

A désignant le module de $\bar{\alpha}$, et ce dernier module étant supérieur à l'unité,

mais inférieurs à chacun des quotients

$$\frac{x}{\xi}, \quad \frac{x'}{\xi'}, \ldots$$

Pour montrer une application de la formule (182), supposons y, y' déterminés en fonction de x, x' par les équations

$$(187) \qquad y = b + x \sin y, \qquad y' = b' + x' \sin y'.$$

Si les modules de x et de x' sont inférieurs au nombre $0,662742\ldots$, alors, d'après ce qui a été dit précédemment, chacune de ces équations offrira une seule racine correspondante à une valeur de $y - b$, ou de $y' - b'$ dont le module soit au-dessous du nombre $1,199678\ldots$ Cela posé, si la fonction

$$F(x, x', b+z, b'+z')$$

reste finie et continue pour des modules de x, x' plus petits que $0,662742\ldots$ et pour des modules de z, z' plus petits que $1,199678\ldots$, on aura, en supposant les modules de Ξ, Ξ' inférieurs eux-mêmes au nombre $1,199678\ldots$

$$(188) \qquad F(x, x', y, y') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - x\cos(b+\Xi)}{\Xi - x\sin(b+\Xi)} \frac{1 - x'\cos(b'+\Xi')}{\Xi' - x'\sin(b'+\Xi')} F(x, x', b+\Xi, b'+\Xi')\, d\Xi\, d\Xi'.$$

Donc, pour développer la fonction implicite de x, x', représentée par

$$F(x, x', y, y')$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, x', il suffira de développer en une semblable série le produit

$$(189) \qquad \frac{1 - x\cos(b+\Xi)}{\Xi - x\sin(b+\Xi)} \frac{1 - x'\cos(b'+\Xi')}{\Xi' - x'\sin(b'+\Xi')} F(x, x', b+\Xi, b'+\Xi').$$

Égalant que la limite supérieure au module du reste, qui complétera la première ou la seconde série, sera précisément le reste de la série qui, étant ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, ξ', a pour somme l'expression

(190) $$\frac{X}{\bar{X}\cdot\bar{f}}\,\frac{X'}{\bar{X}'\cdot\bar{f}'}\,\Lambda\,\frac{1-\bar{x}\cos(b+\bar{z})}{\bar{z}-\bar{x}\sin(b+\bar{z})}\,\frac{1-\bar{x}'\cos(b'+\bar{z}')}{\bar{z}'-\bar{x}'\sin(b'+\bar{z}')}\,\bar{F}(\bar{x},\bar{x}',b+\bar{z},b'+\bar{z}').$$

P_i, dans le développement de la fonction $F(x,x',y,y')$ on négligeant tous les termes dont le degré, mesuré par la somme des exposants de x et de x', devient égal ou supérieur à h, l'erreur commise devait inférieure au produit

(191) $$\frac{1}{A^{h-1}(A-1)}\,\Lambda\,\frac{1-\bar{x}_2\cos(b+\bar{z})}{\bar{z}-\bar{x}_2\sin(b+\bar{z})}\,\frac{1-\bar{x}\,x'\cos(b'+\bar{z}')}{\bar{z}'-\bar{x}\,x'\sin(b'+\bar{z}')}\,\bar{F}(\bar{x}_2,\bar{x}\,x',b+\bar{z},b'+\bar{z}'),$$

A désignant le module de α, et ce module étant supérieur à l'unité, mais inférieur à chacun des rapports $\frac{X}{\bar{f}}$, $\frac{X'}{\bar{f}'}$.

Lorsque à l'aide des méthodes exposées dans ce paragraphe on a déterminé en fonction du nombre n ou h la limite de l'erreur que l'on commet en négligeant, dans le développement d'une fonction explicite ou implicite, tous les termes dont le degré respecté ce nombre dont il s'agit, il est généralement facile de trouver la valeur qu'on doit assigner au nombre n ou h pour que l'erreur commise devienne inférieure à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N,$$

N étant un nombre entier donné. Il suffit en effet, pour y parvenir, de déterminer la partie entière de la quantité négative qui représente la logarithme décimal de l'erreur commise. Observons, pour fixer les idées, que, y étant déterminé en fonction de x par l'équation (166) ou

$$y = b + x\sin y,$$

on propose d'assigner au nombre n une valeur telle que, dans le développement de

$$\frac{1}{1-x\cos y}$$

suivant les puissances ascendantes de x la somme des termes d'un degré égal ou supérieur à n offre un module inférieur à

$$\left(\frac{1}{10}\right)^r.$$

pour la valeur particulière $x = \frac{1}{h}$, on pour une valeur plus petite de la variable x. Il suffira évidemment que l'expression (17h) devienne inférieure à $\left(\frac{1}{10}\right)^N$, et par logarithmes décimaux à $-N$. Si donc on désigne à l'aide de la lettre I le logarithme pris dans le système dont la base est 10, il suffira de choisir le nombre entier n de manière à remplir la condition

$$(19\text{z}) \qquad 0,6099617\ldots + I(n+1) - I\left(1 - \frac{0,6087\ldots}{n}\right) - 0,4204029\ldots n < -N.$$

Ainsi, par exemple, s'il s'agit d'obtenir un nombre n tel que l'erreur commise, quand on réduit les termes d'un degré égal ou supérieur à n, ne surpasse pas un millième. On trouvera, dans ce cas,

$$N = 3,$$

et la condition (19z) donnera

$$(19\text{y}) \qquad n > \frac{0,6099617\ldots}{0,4204029 - \frac{1}{n}\left\{I(n+1) - I\left(1 - \frac{0,6087\ldots}{n}\right)\right\}}.$$

Si l'on réduisait à son premier terme le dénominateur de la fraction que renferme le second membre de la formule (19y), cette fraction serait équivalente à $0,66\ldots$, et par conséquent on vérifierait la formule, en prenant $n = 9$. D'ailleurs, n étant égal ou supérieur à 9, le rapport

$$\frac{I(n+1)}{n}$$

diminuera pour des valeurs croissantes de n, et par suite le produit

$$\frac{1}{n}\left\{I(n+1) - I\left(1 - \frac{0,6087\ldots}{n}\right)\right\}$$

ne surpassera pas

$$\frac{1}{9}\left\{1 - I(1 - 0,6709\ldots)\right\} = 0,1144\ldots$$

Donc la condition (19y) sera remplie, si l'on a

$$n > \frac{2,6999\ldots}{0,4884\ldots - 0,1111\ldots} = 11,7\ldots ,$$

on sorte qu'on pourra prendre $n=12$. Donc, si, dans l'hypothèse admise, on arrête le développement de

$$\frac{1}{1 - x\cos y}$$

après le douzième terme, l'erreur que l'on commettra ne surpassera pas un millième.

Ouvrit, par ce qui précède, que, pour les fonctions implicites, comme pour les fonctions explicites, la détermination des limites supérieures aux modules des restes qui complètent les développements peut être réduite à la détermination des quantités de la forme

$$\Lambda f(\bar{x}) \quad \text{ou} \quad \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots),$$

ou de quantités qui soient évidemment plus grandes. Nous avons donné un grand nombre de formules qui peuvent être utilement employées dans l'évaluation des quantités dont il s'agit. Nous ajouterons ici que le développement en séries des fonctions

$$f(\bar{x}), \qquad f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$$

est souvent un moyen très simple de parvenir à cette évaluation. Ainsi, en particulier, comme on a généralement, quelque soit le module X de $\bar{x}$,

$$\sin \bar{x} < \bar{x} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\bar{x}^3 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\bar{x}^5 - \text{etc.}\ldots,$$

et

$$\cos \bar{x} < 1 - \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 - \text{etc}$$

on en conclurra, en ayant égard à la première des formules (28),

$$\Lambda \sin \bar{u} = X + \frac{X^3}{1.2.3} + \frac{X^5}{1.2.3.4.5} + \cdots = \frac{e^X - e^{-X}}{2},$$

et

$$\Lambda \cos \bar{u} = 1 + \frac{X^2}{1.2} + \frac{X^4}{1.2.3.4} + \cdots = \frac{e^X + e^{-X}}{2},$$

ce que l'on savait déjà. De même, comme, en supposant $X < 1$, on trouve

$$1(1+\bar{x}) = \bar{x} - \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{x}^3}{3} - \frac{\bar{x}^4}{4} + \text{etc.},$$

$$\text{arctang } \bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{\bar{x}^5}{5} - \text{etc.},$$

$$\text{arcsin } \bar{x} = \bar{x} + \frac{1}{2}\frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{\bar{x}^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\bar{x}^7}{7} + \text{etc.}$$

etc...

on aura, dans cette hypothèse, c'est à dire, pour $X < 1$,

$$\Lambda\, 1(1 \pm \bar{u}) = X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \cdots,$$

$$\Lambda \operatorname{arctang} \bar{u} = X + \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} + \cdots,$$

$$\Lambda \operatorname{arcsin} \bar{u} = X + \frac{1}{2}\frac{X^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{X^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{X^7}{7} + \cdots,$$

etc...

et pareillement

$$\Lambda\, 1(1 \pm \bar{u}) = 1\left(\frac{1}{1-X}\right), \quad \Lambda \operatorname{arctang} \bar{u} = 1\left(\frac{1+X}{1-X}\right), \quad \Lambda \operatorname{arcsin} \bar{u} = \operatorname{arcsin} X, \text{ etc...} \tag{194}$$

Enfin, si l'on désigne par $\bar{u}$ une fonction de $\bar{x}$ ou de $\bar{y}$, $\bar{z}$, on trouvera

1°, quelque soit $\Lambda \bar{u}$,

$$\Lambda \sin \bar{u} = \text{ou} < \frac{e^{\Lambda \bar{u}} - e^{-\Lambda \bar{u}}}{2}, \quad \Lambda \cos \bar{u} = \text{ou} < \frac{e^{\Lambda \bar{u}} + e^{-\Lambda \bar{u}}}{2}, \text{ etc...} \tag{195}$$

2° en supposant $\Lambda \bar{u} < 1$,

$$\begin{cases} \Lambda\, 1(1 \pm \bar{u}) = \text{ou} < 1\left(\frac{1}{1-\Lambda \bar{u}}\right), \\ \Lambda \operatorname{arctang} \bar{u} = \text{ou} < 1\left(\frac{1+\Lambda \bar{u}}{1-\Lambda \bar{u}}\right), \ \Lambda \operatorname{arcsin} \bar{u} = \text{ou} < \operatorname{arcsin} \Lambda \bar{u}, \text{ etc...} \end{cases} \tag{196}$$

§ 2. Sur le développement en série de

$$(a+x)^i,$$

a désignant une quantité positive, i une quantité fractionnaire ou négative, x une variable comprise entre les limites $-\varphi$, $+\varphi$, φ un nombre inférieur à a.

Cherchons, à l'aide de la formule du binôme de Newton, développer

$$(a+x)^i$$

en une série dont le terme général soit proportionnel à une puissance entière de x ou de $\frac{x}{b}$, b étant une quantité positive inférieure à a. On aura en effet

$$(1) \qquad (a+x)^i = a^i \left\{ 1 + \frac{i}{1}\frac{x}{a} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\frac{x^2}{a^2} + \dots \right\},$$

$$(2) \qquad (a+x)^i = (a+b)^i \left\{ 1 + \frac{i}{1}\frac{x-b}{a+b} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x-b}{a+b}\right)^2 + \dots \right\},$$

$$(3) \qquad (a+x)^i = (a-b)^i \left\{ 1 + \frac{i}{1}\frac{x-b}{a-b} + \frac{i(i-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^2 + \dots \right\}.$$

Or, dans l'hypothèse admise, les séries (1), (2) seront toujours convergentes. Quant à la série (3), elle sera convergente, lorsque la valeur numérique de $x-b$, ou de $b-x$ sera inférieure à celle de $a-b$, ce qui suppose x renfermé entre les limites $2b-a$ et φ. D'ailleurs la convergence de la série (1), (2) ou (3) sera d'autant plus rapide que la valeur numérique du rapport

$$\frac{x}{a} \quad \text{ou} \quad \frac{x-b}{a+b} \quad \text{ou} \quad \frac{x-b}{a-b}$$

s'approchera plus de zéro. D'ailleurs, pour des valeurs de x renfermées entre les limites 0, φ, le rapport $\frac{x}{a}$ restera compris entre les limites

$$(4) \qquad -\frac{\varphi}{a}, \quad +\frac{\varphi}{a},$$

et le rapport $\frac{x-b}{a+b}$ entre les limites

(5) $$-\frac{\xi-b}{a+b}, \qquad +\frac{\xi+b}{a+b}$$

Puisque, pour des valeurs de x renfermées entre les limites $2b-a$, ξ, le rapport $\frac{x-b}{a-b}$ restera compris entre les limites

(6) $$-1, \qquad \frac{\xi-b}{a}.$$

Donc les plus grandes valeurs numériques des rapports

(7) $$\frac{x}{a}, \qquad \frac{x+b}{a+b}, \qquad \frac{x-b}{a-b},$$

pour des valeurs de x qui vérifient les séries (1), (2), (3) convergentes, seront les trois quantités

(8) $$\frac{\xi}{a}, \qquad \frac{\xi+b}{a+b}, \qquad 1.$$

Or la première de ces trois quantités est la plus petite. Car on a

$$\frac{\xi}{a} = 1 - \frac{a-\xi}{a}, \qquad \frac{\xi+b}{a+b} = 1 - \frac{a-\xi}{a+b},$$

et $\frac{1}{a}$ surpasse $\frac{1}{a+b}$. Donc

$$\frac{a-\xi}{a} > \frac{a-\xi}{a+b}, \text{ et } \frac{\xi}{a} < \frac{\xi+b}{a+b}.$$

Daplus, ξ étant inférieur à a, $\frac{\xi}{a}$ et $\frac{\xi+b}{a+b}$ sont inférieurs à l'unité. Donc, parmi les séries (1), (2), (3), la série (1) est celle qui converge le plus rapidement dans le cas le plus défavorable, c'est à dire, pour les valeurs de x qui favorisent le moins la convergence. Pour cette raison la série (1) devra être préférée aux séries (2) et (3), si l'on veut, pour l'évaluation de $(a+x)^i$ employer toujours le même développement, quelle que soit la valeur de x entre les limites

$$x = -\xi, \quad x = \xi.$$

Mais, dans le cas contraire, on pourra se servir de la formule (2),

lorsque x acquerra une valeur négative inférieure à celle que détermine la formule

$$\frac{x}{a} = -\frac{a+b}{a+b},$$

c'est à dire, inférieure à

$$-\frac{ab}{2a+b},$$

et de la formule (3), lorsque x acquerra une valeur positive supérieure à celle que détermine la formule

$$\frac{x}{a} = -\frac{a-b}{a-b},$$

c'est à dire, supérieure à

$$\frac{ab}{2a-b}.$$

Seconde partie. Applications de la Mécanique céleste.

§ 1er. Equations différentielles des mouvements des planètes.

Soient M la masse du Soleil, m, m', m''... les masses des planètes. Prenons pour origine des coordonnées le centre du Soleil, et soient

$$x, y, z\ ;\quad x', y', z'\ ;\quad x'', y'', z''\ ;\ldots$$

les coordonnées des planètes dans leurs mouvements relatifs autour de cet astre. En choisissant convenablement l'unité de masse, désignons par u, v, w les vitesses de m respectivement suivant les axes des x, y, z, et faisons pour abréger

$$(1)\qquad \mathcal{M} = M + m,$$

$$(2)\qquad r = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}},\quad r' = (x'^2+y'^2+z'^2)^{\frac{1}{2}},\ \text{etc.}\ldots$$

$$(3)\qquad \Delta' = \{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{1}{2}},\ldots$$

$$(4)\qquad R = \frac{m'(xx'+yy'+zz')}{r'^3}+\ldots-\frac{m'}{\Delta'}-\text{etc.}\ldots,$$

on trouvera pour les équations différentielles du mouvement de m

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & \dfrac{dy}{dt} = v, & \dfrac{dz}{dt} = w; \\ \dfrac{du}{dt} = -\dfrac{\mathcal{M}x}{r^3}-\dfrac{\partial R}{\partial x}, & \dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{\mathcal{M}y}{r^3}-\dfrac{\partial R}{\partial y}, & \dfrac{dw}{dt} = -\dfrac{\mathcal{M}z}{r^3}-\dfrac{\partial R}{\partial z}. \end{cases}$$

Pour déduire ces dernières des formules (14) du § 1er de la 1re partie, il suffira de prendre

$$(6)\qquad R = \frac{u^2+v^2+w^2}{2}-\frac{\mathcal{M}}{r}+\ldots,$$

et d'observer que R est simplement fonction de $x, y, z, \ldots$ dans les formules (5), et autres de la même espèce, on remplace dabord

x par ξ, elles deviendront intégrables ; et l'orbite de m deviendra une ellipse dont un foyer sera le centre du soleil. Soient γ l'inclinaison du plan de cette ellipse sur le plan des x, y ; φ l'angle formé par la ligne des nœuds, c'est à dire, par l'intersection du plan de l'orbite avec le plan des x, y avec l'axe des x ; ρ l'angle formé par la rayon vecteur r avec la ligne, ou, la longitude de la planète, ϖ la longitude du périhélie, a le grand axe de l'ellipse, ε la distance des foyers : enfin posons

$$\alpha = \left(\frac{c\mathcal{M}}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et désignons par

$$-\frac{c}{\alpha}$$

la valeur du temps t à l'instant où la planète passait par le périhélie. On aura

$$(7) \qquad x = r(\cos\varphi\cos\rho - \sin\varphi\sin\rho\cos\gamma), \quad y = r(\sin\varphi\cos\rho + \cos\varphi\sin\rho\cos\gamma), \quad z = r\sin\rho\sin\gamma,$$

et

$$(8) \qquad r = a(1 - \varepsilon\cos\psi), \qquad 1 + \varepsilon\cos(\rho - \varpi) = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos\psi}$$

la valeur de ψ étant déterminée en fonction de t par l'équation

$$(9) \qquad \psi = \alpha t + c + \varepsilon\sin\psi.$$

Si maintenant on revient au cas où r reste d'abord nul, on pourra toujours supposer x, y, z déterminés en fonction de t à l'aide de formules $(7), (8), (9)$. Pareillement φ, γ, $\alpha, c, \varepsilon, \varpi$ à l'aide de formules $(7), (8), (9)$. Pareillement φ, γ, c, ε, ϖ deviendront des fonctions de t dont les dérivées, déduites des formules (7) de $\S$ 1 et de la première partie, ou même calculées directement, seront

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = -\dfrac{2}{a^2 n}\dfrac{\partial R}{\partial c}, & \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\dfrac{1-\varepsilon^2}{a^2 n \varepsilon}\dfrac{\partial R}{\partial a}, & \dfrac{\partial c}{\partial t} = \dfrac{2}{a^2 n}\dfrac{\partial R}{\partial a} + \dfrac{1-\varepsilon^2}{a^2 n \varepsilon}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \dfrac{\partial \varpi}{\partial t} = -\dfrac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2 n \varepsilon}\dfrac{\partial R}{\partial \varepsilon} + \dfrac{\operatorname{cotang}\frac{i}{2}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\dfrac{\partial R}{\partial i}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} = -\dfrac{\cos\omega\,\frac{i}{2}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\dfrac{\partial R}{\partial i}, & \dfrac{\partial i}{\partial t} = \dfrac{\cos\omega\,\frac{i}{2}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \varphi} - \dfrac{\operatorname{cotang}\frac{i}{2}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\dfrac{\partial R}{\partial \varpi}, \end{cases}$$

la valeur de R étant exprimée en fonction de $t, \varphi, \tilde{\omega}, a, c, \varepsilon, \varpi$ à l'aide de la formule

$$(11)\qquad R = \frac{m' r \cos S'}{r'^2} + \dots - \frac{m'}{\sqrt{(r^2 - 2rr'\cos S' + r'^2)}} - \text{etc.}\dots,$$

dans laquelle r et ρ sont déterminés par le système des équations (4), (9), et l'angle S' compris entre les rayons vecteurs r, r' par l'équation

$$\cos S' = \frac{xx' + yy' + zz'}{rr'},$$

que l'on peut réduire à

$$(12)\qquad \begin{aligned} \cos S' = {} & \cos(\rho - \rho' + \varphi - \varphi') + 2\sin\rho\sin\rho' \Big\{ \sin^2\tfrac{i}{2}\sin^2\tfrac{i'}{2}\sin^2\tfrac{\varphi-\varphi'}{2} - \sin^2\tfrac{i-i'}{2}\cos(\varphi-\varphi') \Big\} \\ & - 2\sin(\varphi'-\varphi)\cdot\Big\{ \sin^2\tfrac{i}{2}\sin\rho\cos\rho' - \sin^2\tfrac{i'}{2}\sin\rho'\cos\rho \Big\}. \end{aligned}$$

Ajoutons que, si l'on remplace la formule (9) par la suivante

$$(13)\qquad \psi = \int_0^t \alpha\, dt + c + \varepsilon \sin\psi,$$

on devra, dans la troisième des équations (10), substituer la valeur de

$$\frac{\partial R}{\partial a}$$

calculée, comme si α n'était pas fonction de a.

§ 2.* Intégration des formules qui déterminent les différentielles des éléments elliptiques.

La détermination des mouvements relatifs des planètes autour du soleil a trouvé évidemment ramenée, d'après ce qui a été dit ci-dessus, à l'intégration des équations (10) du § 1er, qui fournissent les différentielles de

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi,$$

c'est à dire, les différentielles des éléments elliptiques de l'orbite de la planète m, et des formules du même genre qui fourniraient les différentielles des éléments elliptiques des autres planètes $m', m'', \ldots$ Si l'on pose, pour abréger,

(1) $$(m^2 + m'^2 + m''^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}} = \mu,$$

et

(2) $$m = \Theta\mu, \quad m' = \Theta'\mu, \quad m'' = \Theta''\mu, \text{ etc.},$$

les quantités $\Theta, \Theta', \Theta'', \ldots$ vérifieront l'équation

(3) $$\Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \ldots = 1,$$

et R sera le produit de μ par une certaine fonction des seules quantités

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi, \quad \varphi', \tau', a', c', \varepsilon', \varpi'; \ldots \quad t, \Theta, \Theta', \ldots$$

Par suite les équations (10) du § 1er se réduiront à

(4) $$-\frac{\partial a}{\partial t} = \mu\mathfrak{A}, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \mu\mathfrak{C}, \text{ etc.}, \text{ et l'on aura de même}$$

(5) $$\frac{\partial a'}{\partial t} = \mu\mathfrak{A}', \quad \frac{\partial c'}{\partial t} = \mu\mathfrak{C}', \text{ etc.}$$

---

* Ce paragraphe presque entier est littéralement extrait du Mémoire présenté à l'Académie de Turin le 11 octobre 1821.

$\mathcal{A}, \mathcal{C}, \ldots \mathcal{A}', \mathcal{C}', \ldots$ désignant des fonctions de deux quantités

$$\varphi, \vartheta, a, c, \varepsilon, \vec{\sigma}; \varphi', \vartheta', a', c', \varepsilon', \vec{\sigma}'; \ldots t, \mathcal{C}, \mathcal{D}', \ldots$$

Soient d'ailleurs

$$\varphi_0, \vartheta_0, a_0, c_0, \varepsilon_0, \vec{\sigma}_0 ; \varphi'_0, \vartheta'_0, \text{ etc.} \ldots$$

les valeurs de

$$\varphi, \vartheta, a, c, \varepsilon, \vec{\sigma} ; \varphi', \vartheta', \text{ etc.} \ldots$$

correspondantes à $t=0$. μ sera une quantité très petite réelle ou nulle de M; et, si a peut être développé en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de μ, on aura

$$a = a_0 + \mu a_1 + \frac{\mu^2}{1.2} a_2 + \text{etc.} \ldots, \tag{6}$$

$a_1, a_2, \ldots$ étant les valeurs de $\frac{\partial a}{\partial \mu}$, $\frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2}$, etc. ... correspondantes à $\mu = 0$. Dérivons, en différentiant par rapport à μ les formules (4), (5), etc..., et supposant ensuite $\mu = 0$, on obtiendra les suivantes

$$\frac{\partial a}{\partial \mu} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}\, \partial t, \qquad \frac{\partial c}{\partial \mu} = \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}\, \partial t, \text{ etc.} \ldots$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial \mu^2} = 2 \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}\, \partial t + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial c} \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}\, \partial t + \ldots + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a'} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}'\, \partial t + \ldots \right\} \partial t, \ldots$$

etc. ...

Dans les seconds membres desquelles on devra remplacer $\varphi, \vartheta, a, c, \varepsilon, \vec{\sigma}$; $\varphi', \vartheta', \ldots$ par $\varphi_0, \vartheta_0, a_0, c_0, \varepsilon_0, \vec{\sigma}_0$; $\varphi'_0, \vartheta'_0, \ldots$. On aura donc

$$a = a_0 + \mu \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}\, \partial t + \mu^2 \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}\, \partial t + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial c} \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}\, \partial t + \ldots + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial a'} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}'\, \partial t + \ldots \right\} \partial t + \text{etc.} \ldots, \tag{7}$$

pourvu que, dans les intégrales qui multiplient les diverses puissances de la quantité μ, on remplace a par a_0, c par $c_0, \ldots$. On trouvera, dans les mêmes conditions,

$$c = c_0 + \mu \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}\, \partial t + \mu^2 \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial a} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}\, \partial t + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial c} \int_{t_0}^{t} \mathcal{C}\, \partial t + \ldots + \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial a'} \int_{t_0}^{t} \mathcal{A}'\, \partial t + \ldots \right\} \partial t + \text{etc.} \ldots, \tag{8}$$

etc...

Les formules (7), (8), etc... servent (en intégrales par séries) des équations (4), (5), etc... Elles substituent et les séries qu'elles renferment deviennent convergentes, aussi loin tant que les valeurs de t ne dépassent pas certaines limites. Nous montrerons, dans un second mémoire, comment on peut déterminer ces limites, ou même celles des erreurs commises lorsque dans les séries on néglige tous les termes dont le degré par rapport à p surpasse un nombre donné n; et nous allons maintenant faire voir comment on peut calculer les valeurs approchées des intégrales simples ou multiples que représentent les coefficients des diverses puissances de p dans les différentes séries de ces séries. Tel est le sujet d'approximation de ces mêmes séries.

Dabord il résulte des formules des équations (10) du § 1er que, dans les seconds membres des formules (7), (8), ... les coefficients de p se réduisent à des polynomes dont on obtiendra les différents termes en multipliant des fonctions déterminées de a, c, ε, ... ou a', c', ... etc. par les intégrales simples

$$(9) \qquad \int_0^t \frac{\partial R}{\partial a}\,\partial t, \quad \int_0^t \frac{\partial R}{\partial c}\,\partial t, \quad \ldots\ldots \quad \int_0^t \frac{\partial R}{\partial a'}\,\partial t, \quad \ldots.$$

Quant aux coefficients du carré de p, ils pourront être considérés comme des polynomes dont on obtiendra les différents termes en multipliant des fonctions déterminées de a, c, ε ... a', c', ε', ... etc par les intégrales doubles

$$(10) \qquad \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon^2} \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\,\partial t - \frac{\partial^2 R}{\partial \varepsilon \partial \varepsilon}\int_0^t \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\,\partial t \right\}\partial t,$$

ou

$$(11) \qquad \int_0^t \left\{ \frac{\partial^2 R}{\partial a \partial c'} \int_0^t \frac{\partial R}{\partial \varepsilon'}\,\partial t - \frac{\partial^2 R}{\partial c \partial \varepsilon'}\int_0^t \frac{\partial R}{\partial c'}\,\partial t \right\}\partial t$$

t . . . . . [illegible]

quantités $a, c, \varepsilon, \ldots$ ou $a', c', \varepsilon', \ldots$ etc... ; soit même en substituant par exemple b à a, sans substituer en même temps a à b. On devra faire rentrer comme nous l'avons déjà dit, réduites dans les fonctions et les intégrales dont il s'agit les quantités

$$a, c, \varepsilon, \ldots ; \quad a', c', \varepsilon', \ldots ; \quad \text{etc...}$$

aux constantes

$$a_0, c_0, \varepsilon_0, \ldots ; \quad a'_0, c'_0, \varepsilon'_0, \ldots ; \quad \text{etc...},$$

substituées aux fonctions de $a, c, \varepsilon, \ldots ; a', c', \ldots ;$ etc... par lesquelles les intégrales seront multipliées pourront être immédiatement réduites en séries. En conséquence, pour obtenir les valeurs générales des éléments elliptiques, il suffira d'évaluer les intégrales (9), si l'on conserve seulement les termes qui renferme la première puissance de μ, c'est-à-dire, si l'on borne l'approximation aux termes de l'ordre des masses perturbatrices; les intégrales (10), (11), etc... si l'on veut conserver les termes de l'ordre du carré des masses ; etc...

Observons encore que, si dans l'évaluation des intégrales simples ou multiples de la forme

$$\int_0^t S\,dt, \qquad \int_0^t \left\{ \int_0^t S\,dt \right\} dt, \quad \text{etc...} \tag{12}$$

on substitue aux fonctions de t représentées par $S, \Sigma, \ldots$ des valeurs approchées de ces fonctions représentées par $S, S^0, \ldots$, il sera facile de fixer les limites des erreurs commises dans la substitution des intégrales

$$\int_0^t S^0\,dt, \qquad \int_0^t \left\{ S^0 \int_0^t S^0\,dt \right\} dt, \quad \text{etc...} \tag{13}$$

aux intégrales (12), pourvu que l'on connaisse des limites supérieures aux valeurs numériques des différences

$$S - S^0, \qquad \Sigma - S^0, \qquad \text{etc...}$$

En effet supposons que, pour les valeurs de t qui permettent aux formules (7), (8), etc... de subsister, S reste compris entre les limites $\mathcal{S} \pm i$, et T entre les limites $\mathcal{T} \pm j$; i, j étant des nombres très petits. Comme on aura

$$\int_0^t S\,\partial t - \int_0^t \mathcal{S}\,\partial t = \int_0^t (S - \mathcal{S})\,\partial t,$$

$$\int_0^t \Big(T \int_0^t S\,\partial t\Big)\partial t - \int_0^t \Big(\mathcal{T} \int_0^t \mathcal{S}\,\partial t\Big)\partial t = \int_0^t \Big\{(T - \mathcal{T}) \int_0^t S\,\partial t\Big\}\partial t + \int_0^t \Big\{\mathcal{T} \int_0^t (S - \mathcal{S})\,\partial t\Big\}\partial t,$$

etc... ,

il est clair que l'erreur commise sur l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^t S\,\partial t$$

sera inférieure à

$$\int_0^t i\,\partial t = it, \tag{14}$$

et l'erreur commise sur l'évaluation de l'intégrale

$$\int_0^t \Big(T \int_0^t S\,\partial t\Big)\partial t$$

à laquelle devient l'expression

$$(iT + jS) \int_0^t \int_0^t \partial t^2 = (iT + jS)\frac{t^2}{2} \tag{15}$$

quand on y remplace les fonctions S, T par les plus grandes valeurs qu'elles puissent acquérir en sus des valeurs que peut recevoir la variable t. Cela posé, pour évaluer approximativement les intégrales (9), (10), (11), etc... , et fixer en même temps les limites des erreurs commises, il suffira d'remplacer R par un développement en série convergente ordonné de telle manière qu'il devienne facile d'effectuer une ou plusieurs intégrations relatives à t, puis une ou plusieurs différentiations relatives aux quantités

$$\alpha, \varepsilon, \xi, \ldots ; \alpha', \varepsilon', \ldots \text{ etc...},$$

et en même temps d'assigner des limites supérieures au reste de la série et aux dérivées de ce reste prises par rapport à $a, c, \varepsilon, \dots a', c', \dots$ etc. Tel est l'objet dont nous allons maintenant nous occuper.

Considérons d'abord le premier de ces termes dont la composa le polynome R. Nous aurons, en désignant ce terme par T

$$T = \frac{m' r \cos\Lambda}{r'^2} \tag{16}$$

La valeur de $\cos\Lambda$, donnée par l'équation (12) du § 1er, pourra être présentée sous la forme

$$\begin{aligned}\cos\Lambda = {} & H \cos(\varphi - \vec{\omega}) \cos(\varphi' - \vec{\omega}') + J \cos(\varphi - \vec{\omega}) \sin(\varphi' - \vec{\omega}') \\ & + I \sin(\varphi - \vec{\omega}) \cos(\varphi' - \vec{\omega}') + K \sin(\varphi - \vec{\omega}) \sin(\varphi' - \vec{\omega}'),\end{aligned} \tag{17}$$

les valeurs de H, I, J, K étant

$$\left\{\begin{aligned} H = {} & \cos(\varphi - \varphi' + \vec{\omega} - \vec{\omega}') + 2 \sin\vec{\omega} \sin\vec{\omega}' \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin^2\frac{\varphi' - \varphi}{2} - \sin^2\frac{\gamma'}{2} \sin^2\frac{\gamma}{2} \cos(\varphi' - \varphi) \right\} \\ & - 2 \sin(\varphi' - \varphi) \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin\vec{\omega} \cos\vec{\omega}' - \sin^2\frac{\gamma'}{2} \sin\vec{\omega}' \cos\vec{\omega} \right\}, \\ J = {} & \sin(\varphi - \varphi' + \vec{\omega} - \vec{\omega}') + 2 \sin\vec{\omega} \cos\vec{\omega}' \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin^2\frac{\gamma'}{2} \sin^2\frac{\varphi' - \varphi}{2} - \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin^2\frac{\gamma'}{2} \cos(\varphi' - \varphi) \right\} \\ & - 2 \sin(\varphi' - \varphi) \left\{ - \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin\vec{\omega} \sin\vec{\omega}' - \sin^2\frac{\gamma'}{2} \cos\vec{\omega}' \cos\vec{\omega} \right\}, \\ I = {} & - \sin(\varphi - \varphi' + \vec{\omega} - \vec{\omega}') + 2 \cos\vec{\omega} \sin\vec{\omega}' \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin^2\frac{\varphi' - \varphi}{2} - \sin^2\frac{\gamma'}{2} \cos(\varphi' - \varphi) \right\} \\ & - 2 \sin(\varphi' - \varphi) \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \cos\vec{\omega} \cos\vec{\omega}' + \sin^2\frac{\gamma'}{2} \sin\vec{\omega}' \sin\vec{\omega} \right\}, \\ K = {} & - \cos(\varphi - \varphi' + \vec{\omega} - \vec{\omega}') + 2 \cos\vec{\omega} \cos\vec{\omega}' \left\{ \sin^2\frac{\gamma}{2} \sin^2\frac{\varphi' - \varphi}{2} - \sin^2\frac{\gamma'}{2} \cos(\varphi' - \varphi) \right\} \\ & - 2 \sin(\varphi' - \varphi) \left\{ - \sin^2\frac{\gamma}{2} \cos\vec{\omega} \sin\vec{\omega}' + \sin^2\frac{\gamma'}{2} \cos\vec{\omega}' \sin\vec{\omega} \right\}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Déplus, on verra des formules (8) du § 1er, et en faisant pour abréger

$$\eta = (1 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{19}$$

on aura

$$r = a(1 - \varepsilon\cos\psi) \tag{20}$$

et

$$\cos(\varphi - \vec{\omega}) = \frac{\cos\psi - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos\psi}, \quad \sin(\varphi - \vec{\omega}) = \frac{\eta \sin\psi}{1 - \varepsilon\cos\psi}, \tag{21}$$

ψ étant déterminé en fonction de t par l'équation

(22) $\psi' = nt + c + \varepsilon \sin\psi'$.

Deuième, comptant

(23) $\eta' = (1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}$,

ou bien encore

(24) $r' = a'(1-\varepsilon'\cos\psi')$,

et

(25) $\cos(\rho'-\varpi') = \dfrac{\cos\psi'-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos\psi'}$, $\sin(\rho'-\varpi') = \dfrac{\eta'\sin\psi'}{1-\varepsilon'\cos\psi'}$,

ψ' étant déterminé en fonction de t par l'équation

(26) $\psi' = n't + c' + \varepsilon'\sin\psi'$.

Cela posé, les formules (16) et (17) donneront

(27) $$P = \frac{m'a}{a'^2(1-\varepsilon'\cos\psi')^3}\left\{\begin{matrix} H(\cos\psi-\varepsilon)(\cos\psi'-\varepsilon') + K\eta\eta'\sin\psi\sin\psi' \\ + I\eta\sin\psi\,(\cos\psi'-\varepsilon') + J\eta'\sin\psi'(\cos\psi-\varepsilon)\end{matrix}\right\}.$$

Soit maintenant $\mathcal{P}$ ce que devient la valeur précédente de P, quand on y remplace ψ par $nt+c$, ψ' par $n't+c'$, et faisons d'ailleurs

(28) $\Psi = nt + c$, $\Psi' = n't + c'$,

en sorte qu'on ait

(29) $$\mathcal{P} = \frac{m'a}{a'^2(1-\varepsilon'\cos\Psi')^3}\left\{\begin{matrix} H(\cos\Psi-\varepsilon)(\cos\Psi'-\varepsilon') + K\eta\eta'\sin\Psi\sin\Psi' \\ + I\eta\sin\Psi\,(\cos\Psi'-\varepsilon') + J\eta'\sin\Psi'(\cos\Psi-\varepsilon)\end{matrix}\right\}$$

Puisque les excentricités des orbites planétaires, et par conséquent les coefficients ε, ε' de $\sin\psi$, $\sin\psi'$ dans les formules (22), (26) sont généralement inférieures à $0,662742\ldots$, on pourra, en vertu de la formule de Lagrange étendue au cas de deux variables développer en séries convergentes la fonction P et ses dérivées prises par rapport aux éléments a, c, ε, $\ldots$; a', c', $\ldots\ldots$; et même choisir les limites des erreurs commises, lorsque dans ces séries on négligera tous les termes dans lesquels les puissances

Si $\varepsilon, \varepsilon'$ introduites par les équations (22), (26) offrent des exposants supérieurs à un nombre donné, ou bien encore des exposants dont la somme surpassera un nombre donné. On trouvera ainsi

$$(30)\qquad P = \mathcal{P} + \sum \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n} \frac{\partial^{n-1}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c} \sin^n \Gamma\right)}{\partial c^{n-1}} + \sum \frac{\varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2\cdots n'} \frac{\partial^{n'-1}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c'} \sin^{n'} \Gamma'\right)}{\partial c'^{n'-1}}$$
$$+ \sum \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n} \frac{\varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2\cdots n'} \frac{\partial^{n+n'-2}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial c \partial c'} \sin^n \Gamma \sin^{n'} \Gamma'\right)}{\partial c^{n-1}\, \partial c'^{n'-1}} \cdots$$

Donc le calcul de l'intégrale $\int P\, dt$ sera réduit à celui des intégrales

$$(31)\qquad \int \mathcal{P}\, dt, \quad \int \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c} \sin^n \Gamma\, dt, \quad \int \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial c'} \sin^{n'} \Gamma'\, dt, \quad \int \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial c \partial c'} \sin^n \Gamma \sin^{n'} \Gamma'\, dt.$$

Or l'évaluation de ces dernières exige que l'on développe suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon' \cos \Gamma'$ la fonction

$$(32)\qquad \frac{1}{(1 - \varepsilon' \cos \Gamma')^3}.$$

qui entre dans les valeurs de $\mathcal{P}$. Alors les développements des intégrales (31) ne comprendront que des intégrales de la forme

$$(33)\qquad \int \cos^g \Gamma \cos^{g'} \Gamma' \sin^h \Gamma \sin^{h'} \Gamma'\, dt$$

multipliées par des quantités constantes, et dans lesquelles

$$g, g', h, h'$$

seront des nombres entiers. D'ailleurs on peut aisément transformer le produit

$$\cos^g \Gamma \cos^{g'} \Gamma' \sin^h \Gamma \sin^{h'} \Gamma'$$

en un polynome composé de termes de la forme

$$A \cos(n\Gamma + n'\Gamma') \quad \text{ou} \quad B \sin(n\Gamma + n'\Gamma')$$

A, B étant des quantités constantes, et n, n' des quantités en-

-traire positives ou négatives. Donc on pourra définitivement commencer la détermination de l'intégrale $\int P\,dt$ à celle d'intégrales de la forme

$$(54)\qquad \begin{cases} \int_0^t \cos(nI+n'I')\,dt = \int_0^t \cos\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}\,dt, \\ \int_0^t \sin(nI+n'I')\,dt = \int_0^t \sin\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}\,dt. \end{cases}$$

Or les valeurs de ces dernières sont respectivement

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\{(na+n'a')t+nc+n'c'\} - \sin(nc+n'c')}{na+n'a'}, \\ \dfrac{\cos(nc+n'c') - \cos\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}}{na+n'a'}; \end{cases}$$

et se réduiront, si $na+n'a'$ s'évanouit, à

$$(56)\qquad t\cos(nc+n'c'), \qquad t\sin(nc+n'c').$$

Donc, dans le développement de l'intégrale $\int P\,dt$, les termes qui varieront avec le temps seront de l'une des formes

$$(57)\qquad \begin{cases} A\cos\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}, \\ A\sin\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}, \\ At; \end{cases}$$

et de semblables termes se retrouveront dans un développement des éléments elliptiques a, c, ε, ... Les termes des deux premières formes reprenant périodiquement les mêmes valeurs quand on fait croître t de

$$(58)\qquad \frac{2\pi}{na+n'a'},$$

constituent ce qu'on appelle les inégalités périodiques des mouvements planétaires. Les termes de la forme At constituent des inégalités

vecteurs.

Il est bon d'observer que, dans la valeur de $\int \Omega t$, les expressions de la forme

$$\cos\left[(n\alpha+n'\alpha')t+nc+n'c'\right],$$

$$\sin\left[(n\alpha+n'\alpha')t+nc+n'c'\right],$$

auront pour diviseur

$$n\alpha+n'\alpha'.$$

Donc les termes qui renfermeront ces expressions pourront acquérir des valeurs considérables, si $n\alpha+n'\alpha'$ diffère peu de zéro. Il est inutile d'ajouter que pour les inégalités correspondantes à de très petites valeurs de $n\alpha+n'\alpha'$, le temps de la période, savoir,

$$\frac{2\pi}{n\alpha+n'\alpha'}$$

acquiert une valeur très grande.

Observons encore que, si dans le développement du facteur

$$\frac{1}{(1-2\varepsilon'\cos\overline{\Psi-\psi})^{\frac{1}{2}}},$$

et de ses dérivées prises par rapport à ε' ou à c', on néglige les termes dans lesquels l'exposant de ε' devient supérieur à un nombre donné, il sera facile, d'après ce qui a été dit dans le § 2 de la première partie, de trouver les limites des variables communes. On peut d'ailleurs arriver à ce but de mille manières différentes. Ainsi, par exemple, comme on a généralement

$$(1-x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left\{1.2+2.3x+3.4x^2+\cdots+(n+1)(n+2)x^n+\cdots\right\} \qquad (39)$$

il est clair que, dans le développement de l'expression (32), la somme des termes proportionnels à la $n^{ième}$ puissance de ε' ou à des puissances supérieures sera

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n}\cos^{n}\Pi' + (n+2)(n+3)\varepsilon'^{n+1}\cos^{n+1}\Pi' + \dots\right\},$$

et que cette somme offrira une valeur numérique inférieure à

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n} + (n+2)(n+3)\varepsilon'^{n+1} + \dots\right\} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^{n}\left\{1 + \frac{n+2}{n+1}\frac{n+3}{n+2}\varepsilon' + \dots\right\},$$

par conséquent à

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^{n}\left\{1 + \frac{2}{1}\frac{3}{2}\varepsilon' + \frac{3}{1}\frac{4}{2}\varepsilon'^{2} + \dots\right\},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\frac{(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n}}{2(1-\varepsilon')^{3}}. \tag{140}$$

On trouvera la dérivée de cette somme, relative à ε' ou à c', offrira une valeur numérique inférieure à

$$\frac{1}{2}\left\{n(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n-1} + (n+1)(n+2)(n+3)\varepsilon'^{n} + \dots\right\},$$

et par conséquent à

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^{n-1}\left\{1 + \frac{2.3.4}{1.2.3}\varepsilon' + \frac{3.4.5}{1.2.3}\varepsilon'^{2} + \dots\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n-1}}{2(1-\varepsilon')^{4}},$$

etc....

Au lieu de développer dans P le facteur (32) suivant les puissances ascendantes de ε', on pourrait développer suivant les mêmes puissances le facteur correspondant de Π, savoir,

$$\frac{1}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{3}},$$

et l'on aurait alors

$$\frac{1}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{3}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n}\cos^{n}\psi', \tag{141}$$

la signe Σ s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de n. Par suite le développement de I se composera d'autant de parties rationnelles et entières de produits de la forme

$$\cos^g\psi \sin^h\psi \sin^{h'}\psi',$$

chacun des exposants g, h, h' ne pouvant être que l'un des nombres 0 ou 1. On aurait d'ailleurs, en vertu de la formule de Lagrange

$$\cos^g\psi \sin^h\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} \left\{ \frac{\partial^{n-1}(\cos^g\Psi \sin^{h+n}\Psi)}{\partial\Psi^{n-1}} - n\frac{\partial^{n-1}(\cos^{g+2}\Psi \sin^{h+n-2}\Psi)}{\partial\Psi^{n-1}} \right\}, \tag{42}$$

le produit $1.2.0\ldots n$ devant être remplacé par l'unité dans le premier terme relatif à la valeur zéro de n. Ajoutons que la formule (42) peut encore s'écrire comme il suit

$$\cos^g\psi \sin^h\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} \left\{ h\frac{\partial^{n-1}(\cos^{g+1}\Psi \sin^{h+n-1}\Psi)}{\partial\Psi^{n-1}} - g\frac{\varepsilon^{n-1}(\cos^{g-1}\Psi \sin^{h+n+1}\Psi)}{\partial\Psi^{n-1}} \right\}, \tag{43}$$

la dérivée de l'ordre -1 devant être remplacée par une intégrale relative à Ψ; et que les valeurs de η, η' peuvent aussi être développées en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon'$, puisqu'on a généralement

$$\eta = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{1.2\ldots n}(-1)^n\varepsilon^{2n}. \tag{44}$$

Al'aide des équations (27), (41), (42), (43), (44) et des formules

$$\cos\Sigma = \frac{e^{\Sigma\sqrt{-1}} + e^{-\Sigma\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin\Sigma = \frac{e^{\Sigma\sqrt{-1}} - e^{-\Sigma\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \tag{45}$$

on peut développer les valeurs de I en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon'$, et même déterminer immédiatement le coefficient d'un produit de la forme

$$\frac{m\,a}{a^{1+2}}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos(NI + N'I') \quad \text{ou} \quad \frac{m\,a}{a^{1+2}}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\sin(NI + N'I'),$$

multiplié par l'une des quantités H, Γ, J, K. Pour simplifier les calculs, nous représenterons par les symboles

$$(K)_\ell, \qquad [K]_\ell$$

les coefficients de κ^ℓ dans les développements de

$$(1+\alpha)^K, \qquad (1-\alpha)^{-K};$$

on aura pour $\ell > 0$,

$$(46)\quad \begin{cases} (K)_\ell = \dfrac{K(K-1)\dots(K-\ell+1)}{1\cdot 2\dots\ell} = (K)_{K-\ell}, \\ [K]_\ell = \dfrac{K(K+1)\dots(K+\ell-1)}{1\cdot 2\dots\ell} = [\ell+1]_{K-1} = (K+\ell-1)_\ell = (K+\ell-1)_{K-1}; \end{cases}$$

pour $\ell = 0$, lorsmême que K deviendrait nul,

$$(47)\qquad (K)_0 = [K]_0 = 1,$$

enfin, pour $\ell > 0$,

$$(K)_{-\ell} = [K]_{-\ell} = 0.$$

Cela posé, on trouvera

$$\cos^g \Gamma = \pm \frac{(g)_\xi}{2^g} e^{(g-2\xi)\Gamma\sqrt{-1}}, \qquad \sin^h \Gamma = \pm (-1)^\xi \frac{(h)_\xi}{(2\sqrt{-1})^h} e^{(h-2\xi)\Gamma\sqrt{-1}}$$

$$\cos^g \Gamma \sin^h \Gamma = \pm (-1)^\xi \frac{(g)_\rho (h)_\xi}{2^{g+h}(\sqrt{-1})^h} e^{(g+h-2\rho-2\xi)\Gamma\sqrt{-1}},$$

le signe $\pm$ pouvant être étendu sans inconvénient à toutes les valeurs entières et positives de ρ et de ξ, puisque $(g)_\rho$ et $(h)_\xi$ s'évanouissent lorsque ρ devient supérieur à g, ou ξ supérieur à h; et les formules (42) (43) donneront

$$(49)\quad \cos^g\psi \sin^h\psi = \sum \frac{N^{g+h-1}}{2^{g+h-1}} \left\{(-1)^\xi N (g)_\rho (h+n)_\xi - (-1)^\xi n (g+1)_\rho (h+n-1)_\xi\right\} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\dots n} \frac{e^{N\Gamma\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h},$$

$$(50)\quad \cos^g\psi \sin^h\psi = \sum \frac{N^{g+h-1}}{2^{g+h-1}} \left\{(-1)^\rho h (g+1)_\rho (h+n-1)_\xi + (-1)^\xi g (g-1)_\rho (h+n+1)_\xi\right\} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\dots n} \frac{e^{N\Gamma\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h},$$

les valeurs de N étant

(54) $$N = g + h + n - 2(\rho + \varsigma),$$

et le signe Σ pourront être étendu à toutes les valeurs nulles ou positives de n, ρ, ς. Cependant d'ailleurs, dans les seconds membres des formules (49), (50) réduira l'expression

$$\frac{a^{N\Pi\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h}$$

à sa partie réelle, c'est à dire à

$$(-1)^{\frac{h}{2}} \cos N\Pi,$$

si h est pair, et à

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}} \sin N\Pi$$

dans le cas contraire.

On trouvera en particulier, en posant $g = 1$, $h = 0$, dans la formule (50),

(52) $$\cos\psi = \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^{n+1}} (0)_\rho (n+1)_\varsigma \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} N^{n-1} a^{N\Pi\sqrt{-1}}, \quad N = n+1-2(\rho+\varsigma),$$

ou, ce qui revient au même, puisque l'expression $(0)_\rho$ ne cesse d'être nulle, pour se réduire à l'unité que dans le cas où l'on aura $\rho = 0$,

(53) $$\cos\psi = \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^{n+1}} (n+1)_\varsigma \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} N^{n-1} a^{N\Pi\sqrt{-1}}, \quad N = n+1-2\varsigma;$$

et, en posant $g = 0$, $h = 1$

(54) $$\sin\psi = \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^{n+1}} (1)_\rho (n)_\varsigma \frac{\varepsilon^n}{1.2\ldots n} N^{n-1} \frac{a^{N\Pi\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}, \quad N = n+1-2(\rho+\varsigma).$$

Si l'on combine la première des formules précédentes avec l'équation identique

(55) $$\varepsilon = \Sigma (0)_{n-1} (0)_{\varsigma-1} \varepsilon^n a^{N\Pi\sqrt{-1}},$$

les valeurs de N étant toujours

$$N = n+1-2\varsigma,$$

on en conclura

$$(56)\qquad \cos\psi - \varepsilon = \sum \left\{ \frac{(-1)^s}{2^{n+1}} (n+1)_s \frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n} - (0)_{n-1} (0)_{s-1} \right\} \varepsilon^n e^{N\Pi\sqrt{-1}}.$$

On aura d'ailleurs

$$(57)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\psi'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^s} = \sum\limits_{l=0}^{l=\infty} [s]_l \varepsilon'^l \cos^l\psi' \sin\psi' = \sum\limits_{l=0}^{l=\infty} [l+1]_s \varepsilon'^l \cos^l\psi' \sin\psi', \\ \dfrac{\cos\psi' - \varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^s} = \sum\limits_{l=0}^{l=\infty} \left\{ [l+1]_s \cos^{l+1}\psi' - [l]_s \cos^{l-1}\psi' \right\} \varepsilon'^l; \end{cases}$$

et de ces dernières équations combinées avec la formule (56) on tirera, en écrivant $n'-l$ au lieu de n,

$$(58)\qquad \frac{\sin\psi'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^s} = \sum \frac{[l+1]_s}{2^{n'+1}} \left\{ (-1)^q (l+1)_q (n'-l)_q + (-1)^q l_q (n'-l+2)_q \right\} \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)} \frac{\varepsilon'^{n'}}{\sqrt{-1}} e^{N'\Pi'\sqrt{-1}},$$

la valeur de N' étant

$$(59)\qquad N' = n'+1-2(q+s);$$

et

$$(60)\qquad \frac{\cos\psi'-\varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^s} = \sum \frac{[l+1]_s}{2^{n'+1}} (-1)^s (l+1)_l (l)_q (n'-l+1)_s \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)} \varepsilon'^{n'} e^{-N'\Pi'\sqrt{-1}} - \sum \frac{[l]_s}{2^{n'-1}} (-1)^s (l-1)(l-2)_q (n'-l+1)_s \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)} \varepsilon'^{n'} e^{N'\Pi'\sqrt{-1}},$$

la valeur de N' étant déterminée, dans le premier terme qui renferme le second membre de l'équation (60), par la formule (59), et dans le second terme par la suivante

$$(61)\qquad N' = n'-1-2(q+s).$$

Si l'on voulait que la valeur de N' fût déterminée dans l'un et l'autre terme par la formule (59), il suffirait évidemment de remplacer dans le second terme q par $q-1$.

Si maintenant on joint la formule (27) aux formules (54), (56), (58), (60), on en tirera

$$(62)\qquad \begin{aligned} \Omega = \frac{m'a}{a'^2} \sum (HAA' - Kqq'BB') \frac{\varepsilon^n \varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}} \cos(N\Pi + N'\Pi') \\ + \frac{m'a}{a'^2} \sum (I_{q'}AB + J_{q'}A'B') \frac{\varepsilon^n \varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}} \sin(N\Pi + N'\Pi'), \end{aligned}$$

les valeurs de A, B, A', B' étant déterminées par les formules

$$(65)\quad A = \sum \left\{ (-1)^{\varsigma} (n+1)_{\varsigma} \frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n} - 2^{n+1} (0)_{n-1} (0)_{\varsigma-1} \right\}, \qquad N = n+1-2\varsigma,$$

$$(66)\quad B = \sum (-1)^{\varsigma} (1)_{\varrho} (n)_{\varsigma} \frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}, \qquad N = n+1-2(\varrho+\varsigma),$$

$$(67)\quad A' = \sum (-1)^{\varsigma} [l+1]_2 (l+1)(l)_{\varrho} (n'-l+1)_{\varsigma} \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots (n'-l)}, \qquad N' = n'+1-2(\varrho+\varsigma),$$
$$- 4 \sum (-1)^{\varsigma} [l]_2 (l-1)(l-2)_{\varrho-1} (n'-l+1)_{\varsigma} \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots (n'-l)},$$

$$(68)\quad B' = \sum [l+1]_2 \left\{ (-1)^{\varsigma} (l+1)_{\varsigma} (n'-l)_{\varsigma} + (-1)^{\varsigma} l (l-1)_{\varrho} (n'-l+2)_{\varsigma} \right\} \frac{N'^{n'-l-2}}{1\cdot 2\cdots (n'-l)}.$$

Il est maintenant facile de voir quelles sont les formules qu'on devra substituer aux équations (64), (66), après on comprendra dans les coefficients B et B' ceux que renferment les développements de η et de η'. En effet comme on aura, en vertu de la formule (44),

$$\eta = \sum (-1)^{\nu} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\nu} \varepsilon^{2\nu},$$

et par suite

$$\eta^2 = \sum (-1)^{\nu} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\nu} \varepsilon^{n+2\nu},$$

il est clair que si l'on pose

$$(69)\quad \mathcal{P} = \frac{n'!\,n!}{a^{n'+n}} \sum \left\{ \mathcal{H}A A' - \mathcal{K} B B' \right\} \frac{\varepsilon^{n'+n}}{2^{n+n'+2}} \cos\left(N\mathcal{T} + N'\mathcal{T}'\right)$$
$$+ \frac{n'!\,n!}{a^{n'+n}} \sum \left\{ \mathcal{I} A' B + \mathcal{J} A B' \right\} \frac{\varepsilon^{n'+n}}{2^{n+n'+2}} \sin\left(N\mathcal{T} + N'\mathcal{T}'\right),$$

on devra, en conservant les mêmes valeurs des coefficients A, A', prendre pour B, B' des coefficients déterminés par les formules

$$(64)\quad B = \sum (-1)^{\varsigma+\upsilon} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\upsilon} (1)_{\varrho} (n+2\upsilon)_{\varsigma} \frac{2^{2\upsilon} N^{n-2\upsilon-1}}{1\cdot 2\cdots (n-2\upsilon)}, \qquad N = n+1-2\upsilon-2(\varrho+\varsigma),$$

$$(69)\quad B' = \sum (-1)^{\upsilon} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{\upsilon} [l+1]_2 \left\{ (-1)^{\varsigma} (l+1)_{\varsigma} (n'-l-2\upsilon)_{\varsigma} + (-1)^{\varsigma} l (l-1)_{\varrho} (n'-l+2-2\upsilon)_{\varsigma} \right\} \frac{2^{2\upsilon} N'^{n'-l-2\upsilon-1}}{1\cdot 2\cdots (n'-l-2\upsilon)},$$

$$N = n'+1-2\upsilon-2(\varrho+\varsigma)$$

Dans chacune des équations (63), (64), (65), (66), (69) le signe $\sum$ pourrait être étendu à toutes les valeurs entières nulles ou

positives des nombres $n, n', l, \rho, \varsigma, \upsilon$ que ne varient pas négatives les quantités renfermées entre parenthèses dans les expressions de la forme

$$(K)_l$$

par exemple la quantité $n-2\upsilon$ renfermée dans le symbole

$$(n-2\upsilon)_\varsigma .$$

Alors il est clair que, si l'on recherche les valeurs de A, A', B, B' correspondantes aux valeurs données de n, n', N, N', on devra choisir

$$l, \rho, \varsigma, \upsilon$$

de manière à vérifier les équations

$$N = n+1-2\varsigma, \quad N' = n+1-2(\rho+\varsigma), \text{ etc...}$$

et que l'on pourra ensuite faire abstraction des valeurs de

$$l, \rho, \varsigma, \upsilon$$

pour les appliquer aux termes dont la lettre Σ représente la somme se réduisant à zéro. En conséquence on aura

(70) $$A = 0$$

si $N-n$ est pair,

(71) $$A = -6$$

si l'on suppose $n=1$, $N=0$, et

(72) $$A = (-1)^{\frac{n+1-N}{2}} (n+1)_{\frac{n+1-N}{2}} \frac{N^{n-1}}{1.2.3...n},$$

si, N et $n-1$ étant différents de zéro, $N-n$ est un nombre impair. Daplus on pourra supposer dans A'

$$l = 0 \text{ ou } < n'+1, \quad \rho = 0 \text{ ou } < l, \quad \varsigma = 0 \text{ ou } < n'-l+1,$$

dans B

$$\upsilon = 0 \text{ ou } < \frac{n}{2}, \quad \rho = 0 \text{ ou } < 1, \quad \varsigma = 0 \text{ ou } < n-2\upsilon,$$

enfin dans B'

$$\rho = 0 \text{ ou } < l+1, \quad \varsigma = 0 \text{ ou } < n'-l-2\upsilon.$$

Donc $\rho+\varsigma$ ne pourra surpasser le nombre $n'+1$ dans A',

le nombre $n+l-2\nu$ dans $\mathfrak{B}$, le nombre $n'+l-2\nu$ dans $\mathfrak{B}'$; et par suite les deux quantités N, N' satisferont toujours respectivement à la première entre les limites

$$-(n+l),\quad +(n+l),$$

la seconde entre les limites

$$-(n'+l),\quad +(n'+l).$$

Observons encore que, les coefficients de $\sqrt{-1}$ devant être nuls dans les seconds membres des formules (54), (56), (57) et (60), on peut à l'équation (67) substituer la suivante

$$(70)\qquad P=\frac{m!\,a}{a^{l+2}}\leq\left\{\begin{matrix}+H\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\cos N\mathrm{I}\cos N'\mathrm{I}'+K\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\sin N\mathrm{I}\sin N'\mathrm{I}'\\ +I\mathfrak{A}'\mathfrak{B}\sin N\mathrm{I}\cos N'\mathrm{I}'+J\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\cos N\mathrm{I}\sin N'\mathrm{I}'\end{matrix}\right\}\frac{\varepsilon^{n+n'+2}}{2^{n+n'+2}}.$$

Je montrerai une application des formules qui précèdent, choisissons les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ correspondantes au cas où l'on suppose les quantités N, N' équivalentes à leurs limites supérieures, c'est à dire,

$$(74)\qquad N=n+l,\quad N'=n'+l.$$

Dans cette hypothèse, la formule (72) donnera

$$(75)\qquad \mathfrak{A}=\frac{(n+l)^{n+l}}{1\cdot 2\cdots n}.$$

En outre, dans la formule (68), $\rho+\sigma+\upsilon=0$, et par conséquent $\rho=0$, $\sigma=0$, $\upsilon=0$. Donc

$$(76)\qquad \mathfrak{B}=\frac{(n+l)^{n+l}}{1\cdot 2\cdots n}=\mathfrak{A}.$$

Enfin, dans les formules (69) et (69), on aura

$$\rho+\sigma=0\qquad\text{ou}\qquad \rho+\sigma+\upsilon=0,$$

et par conséquent $\rho=0$, $\sigma=0$, $\upsilon=0$

$$(77)\qquad \mathfrak{A}'=\mathfrak{E}[l+1]_2(l+l)\frac{(n'+l)^{n'-l+l}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)}=\mathfrak{B}',$$

ou, ce qui revient au même,

$$A' = \frac{(n+1)^{n'+1}}{1.2\dots n'} = B'. \tag{76}$$

Ainsi, dans le développement de P, un terme, correspondant à des valeurs de n, n', N, N' qui vérifient les conditions (76), aura pour forme

$$\frac{ma}{a'^2} AA' \left\{ \begin{aligned} &H \cos(n+1)\Pi . \cos(n'+1)\Pi' + K \sin(n+1)\Pi . \sin(n'+1)\Pi' \\ &+ I \sin(n+1)\Pi . \cos(n'+1)\Pi' + J \cos(n+1)\Pi . \sin(n'+1)\Pi' \end{aligned} \right\} \frac{e^n e'^{n'}}{2^{n+n'+2}}, \tag{79}$$

les valeurs de A, A' étant données par les équations (78). Un second terme sera à calculer correspondant aux valeurs de N, N' fournies par les équations

$$-N = -(n+1), \quad N' = -(n'+1); \tag{80}$$

et, si l'on fait pour abréger

$$\begin{aligned} \cos\Delta = {} & H \cos(n+1)\Pi . \cos(n'+1)\Pi' + K \sin(n+1)\Pi . \sin(n'+1)\Pi' \\ & + I \sin(n+1)\Pi . \cos(n'+1)\Pi' + J \cos(n+1)\Pi . \sin(n'+1)\Pi', \end{aligned} \tag{81}$$

la somme des deux termes réunis aura pour double dénominateur

$$\frac{ma}{a'^2} \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2\dots n} \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1.2\dots n'} \frac{e^n e'^{n'}}{2^{n+n'+1}} \cos\Delta \tag{82}$$

Ajoutons qu'on obtiendra encore deux termes équivalents, en posant

$$-N = -(n+1), \quad N' = n'+1,$$

et

$$-N = n+1, \quad N' = -(n'+1).$$

Si la somme des quatre termes relatifs aux valeurs de N, N', n, n' tellement choisies que l'on ait

$$N = \pm(n+1), \quad N' = \pm(n'+1)$$

sera

$$\frac{ma}{a'^2} \frac{(n+1)^{n-1}}{1.2\dots n} \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1.2\dots n'} \frac{e^n e'^{n'}}{2^{n+n'}} \cos\Delta \tag{83}$$

Il est bon d'observer que, pour obtenir $\cos\Delta$, il suffit de poser, dans la valeur générale de $\cos\Delta$,

$$p = \varpi + (n+1)\Pi, \quad p' = \varpi' + (n'+1)\Pi',$$

ou, ce qui revient au même,

$$p = \varpi + \Pi\sqrt{N^2} \qquad p' = \varpi' + \Pi'\sqrt{N^2}. \tag{84}$$

Ouvertes il ne faut pas croire que les valeurs numériques de A et de B soient généralement égales entre elles. Car, si l'on suppose

$$N = n-1,$$

on tirera de la formule (72)

$$A = -(n+1)\frac{(n-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}, \tag{85}$$

et de la formule (64)

$$B = -(n^2+1)\frac{(n-1)^{n-2}}{1\cdot 2\cdots n}. \tag{86}$$

Revenons à la formule (70). Comme on a identiquement

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}, \qquad B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2};$$

$$A' = \frac{A'+B'}{2} + \frac{A'-B'}{2}, \qquad B' = \frac{A'+B'}{2} - \frac{A'-B'}{2},$$

on en conclura

$$H\,AA'\cos N\Pi\cos N\Pi' + K\,BB'\sin N\Pi\sin N\Pi'$$
$$+ I\,AB\sin N\Pi\cos N\Pi' + J\,AB'\cos N\Pi\sin N\Pi'$$

$$= \frac{A+B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\{H\cos N\Pi\cos N\Pi' + I\sin N\Pi\cos N\Pi' + J\cos N\Pi\sin N\Pi' + K\sin N\Pi\sin N\Pi'\}$$
$$+ \frac{A+B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\{H\cos N\Pi\cos N\Pi' + I\sin N\Pi\cos N\Pi' - J\cos N\Pi\sin N\Pi' - K\sin N\Pi\sin N\Pi'\}$$
$$+ \frac{A-B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\{H\cos N\Pi\cos N\Pi' - I\sin N\Pi\cos N\Pi' + J\cos N\Pi\sin N\Pi' - K\sin N\Pi\sin N\Pi'\}$$
$$+ \frac{A-B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\{H\cos N\Pi\cos N\Pi' - I\sin N\Pi\cos N\Pi' - J\cos N\Pi\sin N\Pi' + K\sin N\Pi\sin N\Pi'\}.$$

Donc, si l'on désigne par

$$\cos\Delta_{N\Pi,\,N\Pi'}$$

ce que devient $\cos\Delta$ quand on pose

$$p = \varpi + N\Pi, \qquad p' = \varpi' + N\Pi', \tag{87}$$

on aura, quels que soient ϖ et ϖ',

$$\cos\Delta_{N\Pi,\,N\Pi'} = H\cos N\Pi\cos N\Pi' + I\sin N\Pi\cos N\Pi' + J\cos N\Pi\sin N\Pi' + K\sin N\Pi\sin N\Pi', \tag{88}$$

on trouvera généralement

$$(8g)\qquad P=\frac{m'a}{a^{l+2}}\sum\begin{cases}\frac{A+B}{2}\frac{A'+B'}{2}\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}+\frac{A+B}{2}\frac{A'-B'}{2}\cos\Delta_{N\Sigma,-N'\Sigma'}\\ +\frac{A-B}{2}\frac{A'+B'}{2}\cos\Delta_{-N\Sigma,N'\Sigma'}+\frac{A-B}{2}\frac{A'-B'}{2}\cos\Delta_{-N\Sigma,-N'\Sigma'}\end{cases}\frac{\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}.$$

D'autre part il est facile de s'assurer que les produits

$$A\cos N\Sigma,\quad B\sin N\Sigma$$

ne varient pas quand on change N en $-N$, c'est-à-dire, que la valeur B ne change en $-B$, A restant la même. Pareillement quand on change N' en $-N'$, B' ne change en $-B'$, A' restant la même. Par suite on aura

$$\sum\frac{A+B}{2}\frac{A'+B'}{2}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}=\sum\frac{A+B}{2}\frac{A'-B'}{2}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos\Delta_{N\Sigma,-N'\Sigma'}$$
$$=\sum\frac{A-B}{2}\frac{A'+B'}{2}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos\Delta_{-N\Sigma,N'\Sigma'}=\sum\frac{A-B}{2}\frac{A'-B'}{2}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos\Delta_{-N\Sigma,-N'\Sigma'},$$

et la formule (8g) donnera

$$(9o)\qquad P=\frac{m'a}{a^{l+2}}\sum(A+B)(A'+B')\frac{\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs positives de n, n', et à toutes les valeurs positives ou négatives de N, N'.

Les valeurs de A, A', B, B' fournies par les équations (6d), (6f), (6g), (6h), (6j) ont été déduites de la formule (5o). Si à cette formule on substituait la formule (4g), on trouverait

$$(9l)\quad\begin{cases}A=\sum\left\{(-1)^s\mathcal{N}(1)_p(n)_\sigma-(-1)^s n(2)_p(n-1)_\sigma\right\}\frac{N^{n-1}}{1.2\dots n} & N=n+1-2(p+s),\\ \quad-\sum 2^n(0)_{n-1}(2)_{\sigma+p-1},\\ B=\sum\left\{(-1)^s\mathcal{N}(0)_p(n+1-2\nu)_\sigma-(-1)^s n(1)_p(n-2\nu)_\sigma\right\}(-1)^\nu\frac{2^{2\nu}N^{n-2\nu-1}}{1.2\dots(n-2\nu)}, & N=n+1-2\nu-2(p+s),\\ A'=\sum[l+1]_2\left\{(-1)^s\mathcal{N}(l+1)_p(n'-l)_\sigma-(-1)^s(n'-l)(l+2)_p(n'-l-1)_\sigma\right\}\frac{N'^{n'-l-1}}{1.2\dots(n'-l)}\\ \quad-l\sum[l]_2\left\{(-1)^s\mathcal{N}'(l-1)_{p-1}(n'-l)_\sigma-(-1)^s(n'-l)(l)_{p-1}(n'-l-1)_\sigma\right\}\frac{N'^{n'-l-1}}{1.2\dots(n'-l)}, & N'=n'+1-2(p+s)\\ B'=\sum(-1)^\nu\left(\tfrac12\right)_\nu[l+1]_2\left\{(-1)^s\mathcal{N}'(l)_p(n'+1-l-2\nu)_\sigma-(-1)^s(n'-l-2\nu)(l+1)_p(n)_\sigma\right\}\frac{2^{2\nu}N'^{n'-2\nu-l-1}}{1.2\dots(n'-2\nu-l)}.\end{cases}$$

Les formules (9l) offrent cet avantage qu'elles fournissent les valeurs de

A, A', B, B' même dans le cas où l'on suppose $N=0$ ou $N'=0$. Ainsi, par exemple, la première donnera, pour $N=0$,

$$A=0,$$

si n diffère de l'unité, et

$$A=-6$$

si $n=1$. Deuxième, en posant dans la troisième $N'=0$, on en tirera

$$A' = \left\{[n'+1]_2 - [n']_2\right\}^{(n'+1)\frac{n'+2}{2}} - 4\left\{[n']_2 - [n'-1]_2\right\}^{(n'-1)\frac{n'-1}{2}},$$

ou, ce qui revient au même,

$$A'=0.$$

Il est bon d'observer que, si, dans A, A', B, B', on considère N et N' comme constants, les sommes

$$\begin{cases} \Sigma A \dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+1}}, & \Sigma B \dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+1}}, \\ \Sigma A' \dfrac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}, & \Sigma B' \dfrac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}, \end{cases} \tag{94}$$

ne seront autre chose que les coefficients de

$$\cos(\pm N\Pi), \quad \sin(\pm N\Pi), \quad \cos(\pm N\Pi'), \quad \sin(\pm N\Pi')$$

dans les développements des expressions

$$\varepsilon\cos\psi - \varepsilon, \qquad \eta\sin\psi, \qquad \frac{\cos\psi' - \varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^3}, \qquad \frac{\eta'\sin\psi'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^3}, \tag{95}$$

en séries de Laplace. On aura

$$\begin{cases} \sum_{-\infty}^{\infty} A_N \cos N\Pi = A_0 + 2\sum_{0}^{\infty} A_N \cos N\Pi, \\ \sum_{-\infty}^{\infty} B_N \sin N\Pi = 2\sum_{0}^{\infty} B_N \sin N\Pi, \\ \sum_{-\infty}^{\infty} A'_{N'} \cos N\Pi' = A'_0 + 2\sum_{0}^{\infty} A'_{N'} \cos N\Pi' \\ \sum_{-\infty}^{\infty} B'_{N'} \sin N\Pi' = 2\sum_{0}^{\infty} B'_{N'} \sin N'\Pi'; \end{cases} \tag{96}$$

dans lesquelles on aura

$$A_{-N} = A_N, \quad B_{-N} = -B_N, \quad A'_{-N'} = A'_{N'}, \quad B'_{-N'} = -B_{N'}.$$

D'ailleurs, en posant

$$\cos\psi - \varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} A_N \cos N\Gamma,$$

on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos N\Gamma \,(\cos\psi - \varepsilon)\, d\Gamma = \pi\,\frac{A_N + A_{-N}}{2} = \pi A_N$$

et cette dernière formule subsistera évidemment même dans le cas où l'on supposerait $N = 0$. On aura donc

$$\cos\psi - \varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} A_N \cos N\Gamma, \tag{97}$$

la valeur de A_N étant

$$A_N = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos N\Gamma\,(\cos\psi - \varepsilon)\, d\Gamma. \tag{98}$$

D'un autre côté les formules (29) et (28) donneront

$$\Gamma = \psi - \varepsilon \sin\psi, \tag{99}$$

et il est clair que, pour $\Gamma = \pm\pi$, on aura $\psi = \pm\pi$. Cela posé on tirera de la formule (98), en intégrant par parties,

$$A_N = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} \sin N\Gamma \sin\psi\, d\psi,$$

ou, ce qui revient au même,

$$A_N = \frac{1}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\psi \cdot \sin N(\psi - \varepsilon\sin\psi)\, d\psi. \tag{100}$$

On trouvera de même

$$\eta \sin\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} B_N \sin N\Gamma, \tag{101}$$

la valeur de B_N étant

$$B_N = \frac{1}{2\pi}\eta\int_{-\pi}^{\pi} \sin N\Gamma \cdot \sin\psi\, d\Gamma = \frac{\eta}{2\pi N}\int_{-\pi}^{\pi} \cos N\Gamma \cos\psi\, d\psi$$

ou

$$B_N = \frac{1}{2\pi N}\eta\int_{-\pi}^{\pi} \cos\psi \cdot \cos N(\psi - \varepsilon\sin\psi)\, d\psi. \tag{102}$$

Posons en outre

$$\frac{\cos\psi' - \varepsilon}{(1-\varepsilon\cos\psi')^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{N'} \cos N'\psi', \tag{105}$$

et

$$\frac{\sin\psi'}{(1-\varepsilon\cos\psi')^2} = \sum_{-\infty}^{\infty} B_{N'} \sin N'\psi', \tag{106}$$

les valeurs de $A_{N'}$ et de $B_{N'}$ étant

$$A_{N'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\psi' - \varepsilon}{(1-\varepsilon\cos\psi')^2} \cos N'\psi' \, d\psi'$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos\psi' - \varepsilon}{(1-\varepsilon\cos\psi')^2} (\cos N'\psi' + i \sin N'\psi') \, d\psi',$$

et

$$B_{N'} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\psi'}{(1-\varepsilon\cos\psi')^2} \sin N'\psi' \, d\psi'. \tag{105}$$

On trouve encore qu'à l'aide d'une intégration par parties on peut donner les valeurs de $B_{N'}$ à

$$B_{N'} = \frac{1}{2\pi}\frac{N'}{\varepsilon}\int_{-\pi}^{\pi} \cos N'(\psi' - \varepsilon\sin\psi') \, d\psi'. \tag{107}$$

Mettons ensuite d'ailleurs

$$\cos N'(\psi' - \varepsilon\sin\psi') = \frac{1}{2}\left\{ e^{-N'\psi'\sqrt{-1}} e^{N'\varepsilon\sin\psi'\sqrt{-1}} + e^{N'\psi'\sqrt{-1}} e^{-N'\varepsilon\sin\psi'\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum \frac{\varepsilon^{n'+1} N'^{n'+1}}{1\cdot 2 \cdots (n'+1)} (\sqrt{-1}\sin\psi')^{n'+1} \left\{ e^{-N'\psi'\sqrt{-1}} + (-1)^{n'+1} e^{N'\psi'\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \sum \frac{1}{2^{n'+2}} \frac{\varepsilon^{n'+1} N'^{n'+1}}{1\cdot 2 \cdots (n'+1)} (e^{N'\psi'\sqrt{-1}} - e^{-N'\psi'\sqrt{-1}})^{n'+1} \left\{ e^{-N'\psi'\sqrt{-1}} + (-1)^{n'+1} e^{N'\psi'\sqrt{-1}} \right\}$$

$$= \sum \frac{1}{2^{n'+2}} \frac{\varepsilon^{n'+1} N'^{n'+1}}{1\cdot 2 \cdots (n'+1)} (-1)^{n'+1} \left\{ e^{(n'+1-2s)N'\psi'\sqrt{-1}} + (-1)^{n'+1} e^{-N'\psi'\sqrt{-1}} \right\}.$$

En multipliant par $d\psi'$ les deux membres de cette dernière formule, et intégrant entre les limites $\psi' = -\pi$, $\psi' = \pi$, on en conclura

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos N'(\psi' - \varepsilon\sin\psi') \, d\psi' = 2\pi \sum \frac{1}{2^{n'+2}} \frac{\varepsilon^{n'+1} N'^{n'+1}}{1\cdot 2 \cdots (n'+1)} \left\{ \begin{matrix} (-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}} (n'+1)^{\frac{n'+1-N'}{2}} \\ + (-1)^{n'+1+\frac{n'+1+N'}{2}} (n'+1)^{\frac{n'+1+N'}{2}} \end{matrix} \right\}. \tag{108}$$

D'autre part

$$(-1)^{n'+1+\frac{n'+1+N'}{2}} = (-1)^{n'+1-\frac{n'+1-N'}{2}} = (-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}},$$

et

$$(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}} = (n'+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}}.$$

Donc

$$\int_0^\pi \cos N'(\psi' - \varepsilon' \sin\psi')\, d\psi' = \pi \sum \frac{(-1)^s}{2^{n'+1}} \frac{\varepsilon'^{n'+1} N'^{n'+1}}{1.2\ldots(n'+1)} (n'+1)_s,$$

la valeur de s étant

$$s = \frac{n'+1-N'}{2}; \tag{110}$$

et la formule (107) donnera

$$B'_{N'} = \eta \sum \frac{(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}}{2^{n'+1}} \frac{\varepsilon'^{n'} N'^{n'+2}}{1.2\ldots(n'+1)} (n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}} \tag{111}$$

$$= (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \sum \frac{(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}}{2^{n'+1}} \frac{\varepsilon'^{n'} N'^{n'+2}}{1.2\ldots(n'+1)} (n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}.$$

En développant le second membre de la formule (111) suivant les puissances ascendantes de ε', on reconnaît immédiatement 1° que, N' étant positif, tous les exposants de ε' dans le développement sont égaux ou supérieurs à $N'-1$, puisque

$$(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}$$

s'évanouit lorsque $n'+1$ est inférieur à N', 2° que le coefficient de

$$\frac{\varepsilon^{N'}}{2^{n'+1}},$$

pour $n' = N'-1$, est

$$\frac{(n'+1)^{n'+1}}{1.2\ldots n'}, \tag{112}$$

ce qui s'trouve d'accord avec la formule (78).

Les valeurs de $A_{N'}$, $B_{N'}$, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ étant déterminées par les formules (100), (102), (105) et (107), on aura évidemment

(112)
$$\begin{cases} A_N = \sum \frac{A\,\varepsilon^n}{2^{n+1}}, & B_N = \sum \frac{B\,\varepsilon^n}{2^{n+1}}, \\ A_{N'} = \sum \frac{A'\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}, & B'_{N'} = \sum \frac{B'\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}. \end{cases}$$

Par conséquent la formule (90) pourra s'écrire comme il suit

(116)
$$P = \frac{m'a}{a'^2} \sum_{-\infty}^{\infty} (A_N + B_N)(A'_{N'} + B'_{N'}) \cos \Delta_{NI,\,N'I'}.$$

Remarquons encore que, d'après les notations adoptées, on aura

(115)
$$\cos \Delta_{p,p'} = H \cos p \cos p' + I \sin p \cos p' + J \cos p \sin p' + K \sin p \sin p',$$

et par suite

(116').
$$H = \cos \Delta_{0,0}, \quad I = \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},0}, \quad J = \cos \Delta_{0,\frac{\pi}{2}}, \quad K = \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}.$$

Donc

$$\cos \Delta_{NI,N'I'} = \cos \Delta_{0,0} \cos NI \cos N'I' + \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \sin NI \sin N'I'$$
$$+ \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},0} \sin NI \cos N'I' + \cos \Delta_{0,\frac{\pi}{2}} \cos NI \sin N'I',$$

ou, ce qui revient au même,

$$\cos \Delta_{NI,N'I'} = \tfrac{1}{2}\left(\cos \Delta_{0,0} + \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\right) \cos (NI + N'I')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos \Delta_{0,0} - \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\right) \cos (NI - N'I')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos \Delta_{\frac{\pi}{2},0} - \cos \Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\right) \sin (NI + N'I')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\cos \Delta_{\frac{\pi}{2},0} - \cos \Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\right) \sin (NI - N'I').$$

Pour cette dernière forme il devient très facile d'intégrer par rapport à t l'expression différentielle

$$\cos \Delta_{NI,\,N'I'}$$

multipliée par dt. On peut en outre y parvenir aussi de la manière suivante.

On tire de l'équation (115)

$$\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'} + \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} = (H+K)\cos(N\Sigma-N'\Sigma') + (I-J)\sin(N\Sigma-N'\Sigma'),$$

$$\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'} - \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} = (H-K)\cos(N\Sigma+N'\Sigma') + (I+J)\sin(N\Sigma+N'\Sigma'),$$

$$\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} + \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma} = -(H-K)\sin(N\Sigma+N'\Sigma') + (I+J)\cos(N\Sigma+N'\Sigma'),$$

$$\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma} = (H+K)\sin(N\Sigma-N'\Sigma') - (I-J)\cos(N\Sigma-N'\Sigma').$$

Donc par suite

$$\int\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}\,dt + \int\cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}}\,dt = \frac{\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma}}{-N\alpha-N'\alpha'} + \text{const.},$$

$$\int\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}\,dt - \int\cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}}\,dt = -\frac{\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} + \cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma}}{-N\alpha+N'\alpha'} + \text{const.},$$

et

$$\int\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}\,dt = \left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'} - \frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{1}{2}\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'} + \frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{1}{2}\cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma} + \text{constante}.$$

Donc enfin

$$\int_0^t\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}\,dt = \left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'} - \frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'+\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{N\alpha,N'\alpha'+\frac{\pi}{2}}}{2} - \left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'} + \frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{\cos\Delta_{N\Sigma+\frac{\pi}{2},N'\Sigma'} - \cos\Delta_{N\alpha+\frac{\pi}{2},N'\alpha}}{2}. \tag{11g}$$

Remarque. Il est facile de vérifier directement la formule (11g).

On pourrait déduire formule (27) jointe aux équations (97), (101) (103) et (104) d'Hermite immédiatement l'équation (11h). En effet on trouverait ainsi

$$P = \frac{ma}{a^{1/2}} \leq \left\{\begin{array}{l} H A_N A'_{N'} \cos N\Sigma \cos N'\Sigma' + K B_N B'_{N'} \sin N\Sigma \sin N'\Sigma' \\ + I A_N B'_{N'} \sin N\Sigma \cos N'\Sigma' + J B_N A'_{N'} \cos N\Sigma \sin N'\Sigma' \end{array}\right\},$$

$$= \frac{ma}{a^{1/2}} \leq \left\{\begin{array}{l} \frac{A_N+B_N}{2}\frac{A'_{N'}+B'_{N'}}{2}\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'} + \frac{A_N+B_N}{2}\frac{A'_{N'}-B'_{N'}}{2}\cos\Delta_{N\Sigma,-N'\Sigma'} \\ + \frac{A_N-B_N}{2}\frac{A'_{N'}-B'_{N'}}{2}\cos\Delta_{-N\Sigma,N'\Sigma'} + \frac{A_N-B_N}{2}\frac{A'_{N'}-B'_{N'}}{2}\cos\Delta_{-N\Sigma,-N'\Sigma'} \end{array}\right\}$$

$$= \frac{ma}{a^{1/2}} \leq (A_N+B_N)(A'_{N'}+B'_{N'})\cos\Delta_{N\Sigma,N'\Sigma'}.$$

la règle à l'étudiant à tenter les valeurs entières, positives nulles ou négatives de N et de N'.

Prenons maintenant pour P, remplaçons la première forme du polynome R, mais le second des deux termes qui sont proportionnels à m', avec un signe contraire, admettons qu'on ait

$$P = \frac{m'}{\sqrt{(r^2 - 2rr'\cos\Lambda + r'^2)}}, \tag{119}$$

la valeur de $\cos\Lambda$ étant toujours déterminée par l'équation (17). Si l'on suppose d'abord

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' = 0,$$

on aura simplement

$$P = \frac{m'}{\sqrt{(a^2 - 2aa'\cos\Lambda + a'^2)}}, \tag{120}$$

puis, en supposant $a < a'$, et posant $\alpha = \frac{a}{a'}$, on trouvera

$$P = \frac{m}{a'}\left\{1 - 2\theta\cos\Lambda + \theta^2\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{121}$$

Il vient aisément développer l'expression précédente en une série ordonnée suivant les cosinus des arcs multiples de Λ. Pour y parvenir, il suffit d'observer que

$$1 - 2\theta\cos\Lambda + \theta^2 = (1 - \theta e^{\Lambda\sqrt{-1}})(1 - \theta e^{-\Lambda\sqrt{-1}}). \tag{122}$$

D'autre part

$$\left\{\begin{aligned}(1 - \theta e^{\Lambda\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\theta e^{\Lambda\sqrt{-1}} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2 e^{2\Lambda\sqrt{-1}} + \cdots + \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\theta^n e^{n\Lambda\sqrt{-1}} + \text{etc.},\\ (1 - \theta e^{-\Lambda\sqrt{-1}})^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \tfrac{1}{2}\theta e^{-\Lambda\sqrt{-1}} + \tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2 e^{-2\Lambda\sqrt{-1}} + \cdots + \tfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\theta^n e^{-n\Lambda\sqrt{-1}} + \text{etc.}.\end{aligned}\right. \tag{123}$$

Donc

$$(1 - 2\theta\cos\Lambda + \theta^2)^{-\frac{1}{2}} = \mathfrak{D}_0 + \mathfrak{D}_1\cos\Lambda + \mathfrak{D}_2\cos 2\Lambda + \cdots + \mathfrak{D}_n\cos n\Lambda + \text{etc.}, \tag{124}$$

la valeur de $\mathfrak{D}_n$ étant fournie par l'équation

(125) $\Theta_n = 2\,\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\,\theta^n\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\,\theta^2+\text{etc}\cdots\right)$,

dont le second membre doit être réduit à moitié, lorsqu'on suppose $n=0$.

Faisons, pour de grandes valeurs de n, on a

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}\sqrt{2\pi}\,(1+\delta),$$

δ étant un nombre très petit, et par suite

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

sera de la forme

$$\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(1\pm\delta').$$

D'un autre côté, on aura

$$1+\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\,\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\,\theta^2+\text{etc}\cdots = 1+\frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{2n}}\,\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{2n}}\,\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{4}{2n}}\,\theta^2+\text{etc}\cdots$$

$$= (1+\tfrac{1}{2}\theta+\tfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2+\text{etc}\cdots)(1\pm\delta') = (1-\theta)^{-\frac{1}{2}}(1\pm\delta'),$$

δ' étant très petit, en même temps que $\frac{1}{n}$. Donc, pour de grandes valeurs de n, $\Theta_n\theta^n$ sera le produit de

$$2\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\theta^n(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} = 2\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta}} \qquad (126)$$

par un facteur peu différent de l'unité. Comme la valeur numérique de l'expression (126) va en θ pour limite, il est clair que la série comprise dans le second membre de la formule (124) sera convergente, si l'on a

$$\theta<1.$$

Alors aussi, n étant supposé très grand, la valeur de la série sera sensiblement égale à

$$2\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta}}\,(1+\theta_1\theta^2+\cdots) = 2\left(\frac{n}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{(1-\theta)^{\frac{1}{2}}}$$

pour $\nu=0$, et, pour une valeur quelconque de ν, à

$$\varepsilon\left(\frac{n}{2}\right)\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta^2}}\;\frac{\cos n\lambda-\theta\cos(n-1)\lambda}{1-2\theta\cos\lambda+\theta^2}.$$

On aura d'ailleurs

$$(127)\qquad \left(r^2-2rr'\cos\lambda+r'^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r'}\left(1-2\frac{r}{r'}\cos\lambda+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

et l'on tirera des formules (20), (24)

$$(128)\qquad \frac{r}{r'}=\theta\,\frac{1-2\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}=\theta+\theta\,\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}.$$

Donc

$$\left(1-2\frac{r}{r'}\cos\lambda+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sera ce que devient l'expression (124), quand on fait croître θ de

$$\theta\,\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}.$$

Cela posé, on trouvera

$$(129)\qquad \left(1-2\frac{r}{r'}\cos\lambda+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\Theta_0+\theta\frac{\partial\Theta_0}{\partial\theta}\,\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot2}\frac{\partial^2\Theta_0}{\partial\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\right)^2+\dots$$
$$+\cos\lambda\left\{\Theta_1+\theta\frac{\partial\Theta_1}{\partial\theta}\,\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot2}\frac{\partial^2\Theta_1}{\partial\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\right)^2+\dots\right\}$$
$$+\cos2\lambda\left\{\Theta_2+\theta\frac{\partial\Theta_2}{\partial\theta}\,\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot2}\frac{\partial^2\Theta_2}{\partial\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\right)^2+\dots\right\}$$
$$+\text{etc.}\dots$$
$$=\sum\frac{\theta^l}{1\cdot2\dots l}\,\frac{\partial^l\Theta_K}{\partial\theta^l}\left(\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}\right)^l\cos K\lambda,$$

et

$$(130)\qquad \left(r^2-2rr'\cos\lambda+r'^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a'}\sum\frac{\theta^l}{1\cdot2\dots l}\,\frac{\left(\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos\psi\right)^l}{\left(1-\varepsilon'\cos\psi'\right)^{l+1}}\,\frac{\partial^l\Theta_K}{\partial\theta^l}\cos K\lambda,$$

l'intégrale $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de l et de K, puis on en soustraira

(131) $$P = \frac{m'}{a'} \sum \frac{\theta^l}{1.2 \dots l} \frac{(\varepsilon' \cos\psi' - \varepsilon \cos\psi)^l}{(1 - \varepsilon'\varepsilon\cos\psi')^{l+1}} \cos k v'.$$

D'autre part, κ étant positif, nous avons, pour des valeurs paires de κ,

(132) $$(-1)^{\frac{\kappa}{2}} \cos\kappa\lambda = 1 - \frac{\kappa^2}{1.2} \cos^2\lambda + \frac{(\kappa+2)\kappa(\kappa-2)}{1.2.3.4} \cos^4\lambda - \text{etc.},$$

pour des valeurs impaires de κ

(133) $$(-1)^{\frac{\kappa-1}{2}} \cos\kappa\lambda = \frac{\kappa}{1}\cos\lambda - \frac{(\kappa+1)\kappa(\kappa-1)}{1.2.3} \cos^3\lambda + \frac{(\kappa+3)(\kappa+1)\kappa(\kappa-1)(\kappa-3)}{1.2.3.4.5} \cos^5\lambda - \dots,$$

et généralement, pour des valeurs paires ou impaires de κ,

(134) $$\cos\kappa\lambda = K_0 \cos^\kappa\lambda + K_2 \cos^{\kappa-2}\lambda + K_4 \cos^{\kappa-4}\lambda + \dots = \sum K_{\kappa-h} \cos^{\kappa-h}\lambda,$$

$K_{\kappa-h}$ étant nul pour des valeurs impaires de $\kappa-h$, et déterminé, pour des valeurs paires de $\kappa-h$ par l'équation

(135) $$K_{\kappa-h} = (-1)^{\frac{\kappa-h}{2}} \frac{(\kappa+h-2)(\kappa+h-4)\dots(\kappa-h+2)}{2.3.\dots.h} \kappa,$$

qu'on peut aussi présenter sous la forme

(136) $$K_{\kappa-h} = (-1)^{\frac{\kappa-h}{2}} 2^{-h} \frac{\kappa}{\kappa+h} \left(\frac{\kappa+h}{2}\right)_h,$$

et qui subsiste alors dans le cas même où l'on réduit h à zéro, κ étant pair, ou à l'unité, κ étant impair. Donc la formule (131) devient

(137) $$P = \frac{m'}{a'} \sum K_{\kappa-h} \frac{\theta^l}{1.2 \dots l} \frac{(\varepsilon' \cos\psi' - \varepsilon\cos\psi)^l}{(1 - \varepsilon'\varepsilon\cos\psi')^{l+1}} \frac{\partial^l \Theta_\kappa}{\partial\theta^l} \cos h\lambda.$$

On aura d'ailleurs

(138) $$(\varepsilon' \cos\psi' - \varepsilon\cos\psi)^l = \sum (-1)^i \binom{l}{i} \varepsilon^i \varepsilon'^{l-i} \cos^i\psi \cdot \cos^{l-i}\psi',$$

(139) $$\cos v = \cos\Delta_{0,0} \cos(p-\varpi)\cos(p'-\varpi') + \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} \cos(p-\varpi)\sin(p'-\varpi')$$
$$+ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0} \sin(p-\varpi)\cos(p'-\varpi') + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} \sin(p-\varpi)\sin(p'-\varpi'),$$

(140) $$\cos^h\int =$$

$$\sum_{g}^{h}(h)_g \cos^g(p-\varpi)\sin^{h-g}(p-\varpi,\left\{\cos\Delta_{0,0}\cos(p'-\varpi')+\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sin(p'-\varpi')\right\}^g\left\{\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos(p'-\varpi')+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin(p'-\varpi')\right\}^{h-g},$$

$$\left\{\cos\Delta_{0,0}\cos(p'-\varpi')+\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sin(p'-\varpi')\right\}^g=\sum_{j}^{g}(g)_j\cos^j\Delta_{0,0}\cos^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos^j(p'-\varpi')\sin^{g-j}(p'-\varpi'),$$

$$\left\{\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos(p'-\varpi')+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin(p'-\varpi')\right\}^{h-g}=\sum_{g'j}(h-g)_{g'j}\cos^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\cos^{g'-j}(p'-\varpi')\sin^{h-g-g'+j}(p'-\varpi'),$$

et par suite

(141) $$\cos^h\int =$$

$$\sum(h)_g(g)_j(h-g)_{g'j}\cos^j\Delta_{0,0}\cos^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\cos^g(p-\varpi)\sin^{h-g}(p-\varpi)\cos^{g'}(p'-\varpi')\sin^{h-g-g'}(p'-\varpi'),$$

ou, ce qui revient au même,

(142) $$\cos^h\int =$$

$$\sum(h)_g(g)_j(h-g)_{g'j}\eta^{h-g}\eta'^{h-g'}\cos^j\Delta_{0,0}\cos^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{g'}\psi'\sin^{h-g'}\psi'\cos^g(\cos\psi'-\varepsilon)\sin^{h-g}\psi\,d\psi\,d\psi'}{(1-2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2)^{\frac{h}{2}}(1-2\varepsilon'\cos\psi'+\varepsilon'^2)^{\frac{h}{2}}}.$$

Il est bon d'observer que dans la formule (142), on a

$$(h)_g(g)_j(h-g)_{g'j}=\frac{h(h-1)\cdots(h-g-g'+j+1)}{(1.2\ldots j)(1.2\ldots(g-j))(1.2\ldots(g'-j))(1.2\ldots(h-g-g'+j))}.$$

Donc, si l'on pose pour abréger

$$\frac{h(h-1)\cdots(h-\kappa-\kappa'-\kappa'+1)}{(1.2\ldots\kappa)(1.2\ldots\kappa')(1.2\ldots\kappa'')}=(h)_{\kappa,\kappa',\kappa''}$$

on trouvera

(143) $$\cos^h\int=\sum(h)_{j,g-j,g'-j}\eta^{h-g}\eta'^{h-g'}\frac{\cos^g(\cos\psi-\varepsilon)^g\cos^{g'}\psi'\sin^{h-g'}\psi'\sin^{h-g}\psi\,d\psi\,d\psi'}{(1-2\varepsilon\cos\psi+\varepsilon^2)^{\frac{h}{2}}(1-2\varepsilon'\cos\psi'+\varepsilon'^2)^{\frac{h}{2}}},$$

la valeur de $\mathfrak{D}$ étant

(144) $$\mathfrak{D}=\cos^j\Delta_{0,0}\cos^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}.$$

On en conclura

(145) $$\int=\frac{m'}{a'}\sum(-1)^i\mathfrak{K}_{\kappa-h}(l)_i(h)_{i,g-j,g'-j}\mathfrak{D}\varepsilon^i\varepsilon'^{l-i}\eta^{h-g}\eta'^{h-g'}\frac{\partial^l\Psi}{\partial\varepsilon^l}\frac{\varepsilon^l}{1\ldots l}$$

Les valeurs de Ψ, Ψ' étant

$$\Psi = \frac{\cos^i\psi\,(\cos\psi-\varepsilon)^g \sin^{h-g}\psi}{(1-\varepsilon\cos\psi)^h}, \tag{146}$$

$$\Psi' = \frac{\cos^{l-i}\psi'\,(\cos\psi'-\varepsilon')^{g'} \sin^{h'-g'}\psi'}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{h'+l+1}}. \tag{147}$$

Observons maintenant que l'on a

$$(\cos\psi-\varepsilon)^g = \sum (-1)^\lambda (g)_\lambda\, \varepsilon^\lambda \cos^{g-\lambda}\psi,$$

$$(1-\varepsilon\cos\psi)^{-h} = \sum [h]_\mu\, \varepsilon^\mu \cos^\mu\psi.$$

Donc

$$\Psi = \sum (-1)^\lambda (g)_\lambda [h]_\mu\, \varepsilon^{\lambda+\mu} \cos^{g+i+\mu-\lambda}\psi \cdot \sin^{h-g}\psi. \tag{148}$$

On a de même

$$\Psi' = \sum (-1)^{\lambda'} (g')_{\lambda'} [h'+l+1]_{\mu'}\, \varepsilon'^{\lambda'+\mu'} \cos^{g'+l-i+\mu'-\lambda'}\psi' \cdot \sin^{h'-g'}\psi'. \tag{149}$$

En combinant ces dernières équations avec la formule (50), et écrivant ν ou ν' au lieu de n, on trouvera

$$\Psi = \sum (-1)^\lambda (g)_\lambda [h]_\mu \frac{N^{\nu-1}}{2^{\nu+h+i+\mu-\lambda}} \begin{cases} (-1)^\sigma N^\sigma (g+i+\mu-\lambda)_\sigma (h+\nu-g-1)_\sigma \\ -(-1)^\sigma \nu (g+i+\mu-\lambda)_\sigma (h+\nu-g-1)_\sigma \end{cases} \begin{cases} \varepsilon^{\nu+\lambda+\mu} & N^\sigma \sqrt{-1}^\sigma \\ a & \end{cases} \frac{}{(1\ldots\nu)(1\ldots\nu-1)^{h-g}}, \tag{150}$$

et

$$\Psi\Psi' = \sum (-1)^{\lambda'} (g')_{\lambda'} [h'+l+1]_{\mu'} \frac{N'^{\nu'-1}}{2^{\nu'+h'+l-i+\mu'-\lambda'}} \begin{cases} (-1)^{\sigma'} N'^{\sigma'} (g'+l-i+\mu'-\lambda')_{\sigma'} (h'+\nu'-g')_{\sigma'} \\ -(-1)^{\sigma'} \nu' (g'+l-i+\mu'-\lambda')_{\sigma'} (h'+\nu'-g'-1)_{\sigma'} \end{cases} \begin{cases} \varepsilon'^{\nu'+\lambda'+\mu'} & N'^{\sigma'} \sqrt{-1}^{\sigma'} \\ a' & \end{cases} \frac{}{(1\ldots\nu')(1\ldots\nu'-1)^{h'-g'}}, \tag{151}$$

Les valeurs de N et de N' étant

$$\begin{cases} N = \nu+h+i+\mu-\lambda-2(\sigma+\sigma'), \\ N' = \nu'+h'+l-i+\mu'-\lambda'-2(\sigma+\sigma'). \end{cases} \tag{152}$$

Enfin l'on aura

$$\begin{cases} \eta^{h-g} = (1-\varepsilon^2)^{\frac{h-g}{2}} = \sum (-1)^\upsilon \left(\frac{h-g}{2}\right)_\upsilon \varepsilon^{2\upsilon}, \\ \eta'^{h-g'} = (1-\varepsilon'^2)^{\frac{h-g'}{2}} = \sum (-1)^{\upsilon'} \left(\frac{h-g'}{2}\right)_{\upsilon'} \varepsilon'^{2\upsilon'}; \end{cases} \tag{153}$$

et

$$\frac{e^{(N\Pi+N'\Pi')\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^{2h-g-g'}} = (-1)^h e^{(N\Pi+N'\Pi'+\pi\frac{g+g'}{2})\sqrt{-1}}$$

$$= (-1)^h \left\{ \cos(N\Pi+N'\Pi'+\pi\tfrac{g+g'}{2}) + \sqrt{-1}\,\sin(N\Pi+N'\Pi'+\pi\tfrac{g+g'}{2}) \right\}.$$

Cela posé, j'introduis pour abréger

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu+i+\lambda+\mu+2\nu = n, \\ \nu'+l-i+\lambda'+\mu'+2\nu' = n', \end{array} \right. \tag{194}$$

entre les formules (148), (150), (151), (150)

$$I = \tag{199}$$

$$\frac{n'}{a^n} \sum (-1)^{h+i} \frac{\theta^h}{1.2\ldots l} \frac{K_{\kappa+h}}{2^{n+n'+2h}} (l)_i (h)_j \, \varepsilon^{g-j}\varepsilon'^{g'-j} \, \mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{D}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'} \frac{\partial^l \Theta_K}{\partial\theta^l} \cos(N\Pi+N'\Pi'+\pi\tfrac{g+g'}{2}),$$

ou, ce qui revient au même,

$$I = \tag{196}$$

$$\frac{n'}{a^n} \sum (-1)^{i+\frac{\kappa+h}{2}} \frac{\kappa}{\kappa+h} \binom{\frac{\kappa+h}{2}}{\rho} \frac{(l)_i (h)_j \, \varepsilon^{g-j}\varepsilon'^{g'-j}}{2^{n+n'+h}} \frac{\theta^l}{1.2\ldots l} \mathcal{C}\mathcal{C}'\mathcal{D}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'} \frac{\partial^l \Theta_K}{\partial\theta^l} \cos(N\Pi+N'\Pi'+\pi\tfrac{g+g'}{2}),$$

les valeurs de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ étant

$$\mathcal{C} = \tag{197}$$

$$\sum (-1)^{\lambda+\nu} 2^{2(\lambda+\nu)} (g)_\lambda [h]_\mu \binom{\frac{h-g}{2}}{\nu} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s N^{g+i+\mu-\lambda} \binom{h+\nu-g}{\rho} \zeta^{h+\nu-g} \\ -(-1)^s N^{g+i-1+\mu-\lambda} \binom{h+\nu-g-1}{\rho} \zeta^{h+\nu-g-1} \end{array} \right\} \frac{N^{\nu-1}}{1.2\ldots\ldots\nu},$$

$$\mathcal{C}' = \tag{198}$$

$$\sum (-1)^{\lambda'+\nu'} 2^{2(\lambda'+\nu')} (g')_{\lambda'} [h+l+1]_{\mu'} \binom{\frac{h-g'}{2}}{\nu'} \left\{ \begin{array}{l} (-1)^s N'^{g'+l-i+\mu'-\lambda'} \binom{h+\nu'-g'}{\rho} \zeta'^{h+\nu'-g'} \\ -(-1)^s N'^{g'+l-i+1+\mu'-\lambda'} \binom{h+\nu'-g'-1}{\rho} \zeta'^{h+\nu'-g'-1} \end{array} \right\} \frac{N'^{\nu'-1}}{1.2\ldots\nu'},$$

et la règle à se donner pour étendre dans la formule (196), qu'aux valeurs paires de $\kappa+h$. J'ajouterai que, dans les formules (155), (157), (158) on pourrait, dans

inversement atteindra le signe $\leq$ à toutes les valeurs entières nulles ou positives de

(159) $\nu, \nu', l, \kappa, h, i, j, g, g', \lambda, \lambda', \mu, \mu', \upsilon, \upsilon', \varsigma, \varsigma', \varsigma_1, \varsigma_1'$,

qui vérifient parmi les valeurs de $\kappa+h$. Mais, comme les expressions de la forme

$$K_{\kappa-h} \quad (K)_h \quad , \quad (K)_{h,h',h''}$$

s'évanouissent, la première et la seconde lorsque h devient négatif ou supérieur à κ, et la troisième, lorsque une des quantités h, h', h'' devient négative, ou lorsque la somme $h+h'+h''$ surpasse κ, il est clair que dans les formules dont il s'agit, on pourra se contenter d'attribuer aux nombres (159) des valeurs telles que les différences

(160) $\kappa-h,\ l-i,\ h-j,\ g-j,\ g'-j,\ h-g,\ h-g',\ h+i-g-g',\ g-\lambda,\ h-\mu,\ g'-\lambda',\ h+l+1-\mu'$,

soient nulles ou positives, et que les sommes

(161) $\nu+h+i+\mu-\lambda = (g+i+\mu-\lambda)+(h+\nu-g) = (g+i+1+\mu-\lambda)+(h+\nu-g-1)$

(162) $\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda' = (g'+l-i+\mu'-\lambda')+(h+\nu'-g') = (g'+l-i+1+\mu'-\lambda')+(h+\nu'-g'-1)$

soient égales ou supérieures la première à $g+\varsigma$, la seconde à $g'+\varsigma'$. Par suite i devra être égal ou inférieur à l; h à κ; g, g', j et μ à h; λ à g, λ' à g'; μ' à $h+l+1$; enfin que les nombres

$$h, j, g, g', \lambda, \lambda', \mu$$

ne puissent surpasser κ. Observons d'ailleurs qu'en vertu des formules (154)

chacun des nombres $\nu, \iota, \lambda, \mu, 2\upsilon$ devra être au plus égal à n, et

chacun des nombres $\nu', l-i, \lambda', \mu', 2\upsilon'$ au plus égal à n'. Donc

$$l = i + (l-i)$$

devra être au plus égal à $n+n'$. Observons encore que l'on tire des formules (152) et (154)

(163) $$\begin{cases} \lambda+\nu+\rho+\sigma = \dfrac{n+h-N}{2}, \\ \lambda'+\nu'+\rho'+\sigma' = \dfrac{n'+h-N'}{2}, \end{cases}$$

et

(164) $$\begin{cases} \lambda+\nu+(\nu+h+i+\mu-\lambda)-(\rho+\sigma) = \dfrac{n+h+N}{2}, \\ \lambda'+\nu'+(\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda')-(\rho'+\sigma') = \dfrac{n'+h+N'}{2}. \end{cases}$$

Or, puisque les premiers membres des formules (163), (164) doivent être nuls ou positifs, on pourra en dire autant des seconds membres. Donc les quantités N, N' devront nécessairement compter, la première entre les limites

$$-(n+h), \quad +(n+h),$$

la seconde entre les limites

$$-(n'+h), \quad +(n'+h).$$ *

Déplus, chacun des nombres

$$\lambda, \quad \nu$$

et même leur somme

$$\lambda+\nu$$

ne pourra surpasser la plus petite des nombres

$$\frac{n+h-N}{2}, \quad \frac{n+h+N}{2},$$

c'est à dire, l'expression

(165) $$\frac{n+h-\sqrt{N^2}}{2}.$$

De même $\lambda'+\nu'$ ne pourra surpasser

(166) $$\frac{n'+h-\sqrt{N'^2}}{2}.$$

Enfin les quantités

---

* Les premiers membres des formules (163), (164) devant être entiers, les seconds devront l'être pareillement. Donc $n \pm N+h$, $n' \pm N'+h$, et par suite $n \pm N+K$, $n' \pm N'+K$ devront être pairs; et $n \pm N$, $n' \pm N'$ pairs ou impairs en même temps que K.

(167) $\quad i+\eta,\ i'+\eta',\ (\nu+h+i+\mu-\lambda)-(i+\eta),\ (\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda')-(i'+\eta')$

ne pourront surpasser des nombres

(168) $\quad \frac{n+h-N}{2},\ \frac{n'+h-N'}{2},\qquad \frac{n+h+N}{2},\qquad \frac{n'+h+N'}{2}$

A l'aide des formules (155) ou (156), (157) et (158), on peut trouver immédiatement dans Σ le coefficient d'un produit de la forme

(169) $\quad \frac{t^l}{1.2\ldots l}\,\frac{\partial^l \Theta}{\partial \theta^l}\,\varepsilon^{\mu\lambda+\mu'\lambda'}\cos(N\mathrm{I}+N'\mathrm{I}'),$

ou

(170) $\quad \frac{\vartheta^l}{1.2\ldots l}\,\frac{\partial^l \Theta_\varkappa}{\partial \theta^l}\,\varepsilon^{\mu\lambda+\mu'\lambda'}\sin(N\mathrm{I}+N'\mathrm{I}'),$

et s'assurer que ce coefficient est toujours composé d'un nombre fini de termes. En effet

$$\cos(N\mathrm{I}+N'\mathrm{I}'+\pi\,\tfrac{g+g'}{2})$$

se réduit à

$$(-1)^{\frac{g+g'}{2}}\cos(N\mathrm{I}+N'\mathrm{I}')$$

quand $g+g'$ est un nombre pair, et à

$$(-1)^{\frac{g+g'+1}{2}}\sin(N\mathrm{I}+N'\mathrm{I}')$$

dans le cas contraire. De plus, il suit des remarques précédemment faites qu'étant donnés les nombres $n, n', l, \varkappa$ et les quantités N, N', tous les nombres de la suite (159) pourront être réduits au-dessus de certaines limites. Il y a plus : tous les nombres de la suite (159) et les valeurs numériques de N, N' pourront être supposés inférieurs à certaines limites déterminées, lorsqu'on donnera seulement n, n' et $\varkappa$; puisque l est tout au plus égal à $n+n'$, h à $\varkappa$, $\sqrt{N^2}$ à $n+h$, et $\sqrt{N'^2}$ à $n'+h$.

Pour montrer une application des formules précédentes, considérons en particulier le cas dans lequel on aurait

(171) $\qquad i=0, \quad i'=0, \qquad \Phi-\Phi'+\vartheta-\vartheta'=0.$

Dans ce cas on trouvera

(172) $\qquad \cos\Delta = \cos(p-\vartheta-p'+\vartheta') = \cos(p-\vartheta)\cos(p'-\vartheta') + \sin(p-\vartheta)\sin(p'-\vartheta'),$

et par suite

(173) $\qquad \cos\Delta_{0,0}=1, \quad \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}=0, \quad \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}=0, \quad \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}=$

Il en résulte qu'on aura

$$\mathfrak{D}=1$$

si $g=g'=j$, et

$$\mathfrak{D}=0$$

dans le cas contraire. Donc la formule (156) pourra être réduite à

(174) $\qquad \mathfrak{P}=$

$$\frac{|m'|}{a'}\sum(-1)^{g+i+\frac{\kappa+h}{2}}\frac{\kappa}{\kappa+h}\binom{\frac{\kappa+h}{2}}{k}\frac{(l)_i\,(k)_g}{2^{\kappa+\kappa'+h}}\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\theta^l}{1\cdot2\cdots l}\frac{\partial^l\Theta_\kappa}{\partial\theta^l}2^{\kappa}\varepsilon^{i\kappa'}\cos(N^{\mathrm{I}}\mathfrak{L}+N'^{\mathrm{I}}\mathfrak{L}'),$$

les valeurs de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ étant données par les équations (157), (158). Dans les-quelles on devra supposer $g'=g$.

Comme, dans le système du monde, les excentricités $\varepsilon, \varepsilon'$ ont généralement des valeurs peu considérables, il importe de connaître, pour des valeurs données de N et de N', les plus petites valeurs qu'on puisse attribuer à κ et à κ'. Or, κ devant être égal ou supérieur à

$$\sqrt{N^2}-h,$$

la plus petite valeur de κ sera évidemment, si $h=$ ou $>\sqrt{N^2}$

zéro ou l'unité

suivant que $\sqrt{N^2}-h$ sera pair ou impair, et

$$\sqrt{N^2}-h,$$

si $h=$ ou $<\sqrt{N^2}$ De même, la plus petite valeur de κ' sera, si $h=$ ou $>\sqrt{N'^2}$,

zéro ou l'unité

suivant que $\sqrt{N^{12}} - h$ sera pair ou impair, et

$$\sqrt{N^{12}} - h$$

si $h = ou < \sqrt{N^{12}}$. Ailleurs on tirera des formules (184), en posant $n=0$,

(175) $$\lambda = \mu = \nu = i = \upsilon = 0,$$

et par suite

(176) $$\mathcal{C} = \Sigma (-1)^{\varsigma} (g)_{\varsigma} (h-g)_{\varsigma}, \qquad \rho + \varsigma = \frac{N-h}{2};$$

puis, en posant $n'=0$,

(177) $$\lambda' = \mu' = \nu' = l - i = \upsilon' = 0,$$

et par suite

(178) $$\mathcal{C}' = \Sigma (-1)^{\varsigma'} (g')_{\rho'} (h-g')_{\varsigma'}, \qquad \rho' + \varsigma' = \frac{N'-h}{2}.$$

D'autre part, si l'on pose $N = n+h$, ou $N = -n-h$, on tirera des formules (163), (164) et (152)

(179) $$\lambda = \upsilon = 0, \qquad \nu + \mu + i = n;$$

et de plus

(180) $$\rho = 0, \quad \varsigma = 0; \quad \text{ou} \quad \rho + \varsigma = \nu + h + \mu + i - \lambda = n + h.$$

Par suite on trouvera 1° en supposant $N = n+h$

(181) $$\mathcal{C} = \Sigma [h]_{\mu} (n+h-\nu) \frac{(n+h)^{\nu-1}}{1.2.\ldots.\nu}$$

2° en supposant $N = -n-h$,

(182) $$\mathcal{C} = \Sigma (-1)^{h-g} [h]_{\mu} (n+h-\nu) \frac{(n+h)^{\nu-1}}{1.2.\ldots.\nu}$$

Dernière, si l'on pose $N' = n'+h$, ou $N' = -n'-h$, on tirera des formules (169), (164) et (152)

(183) $$\lambda' = \upsilon' = 0, \qquad \nu' + \mu' + l - i = n';$$

et de plus

(184) $$\rho' = 0, \quad \varsigma' = 0; \quad \text{ou} \quad \rho' + \varsigma' = \nu' + h + \mu' + (l-i) - \lambda' = n' + h;$$

puis on en conclura 1° en supposant $N' = n' + h$

(185) $$\mathcal{C}' = \sum [h+l+1]_{\mu'} (n'+h-\nu') \frac{(n'+h)^{\nu'-1}}{1.2\dots\nu'},$$

2° en supposant $N' = -n'-h$

(186) $$\mathcal{C}' = \sum (-1)^{h-g'} [h+l+1]_{\mu'} (n'+h-\nu') \frac{(n'+h)^{\nu'-1}}{1.2\dots\nu'}.$$

Enfin, si l'on suppose $n=1$, la formule (157) donnera 1° pour $i=0$

(187) $$\mathcal{C} = \sum (-1)^{\varsigma} N(g)_{\rho} (h-g+1)_{\varsigma}$$
$$- hg \sum (-1)^{\varsigma} (g-1)_{\rho-1} (h-g)_{\varsigma} + (h-1) \sum (-1)^{\varsigma} (g+1)_{\rho} (h-g-1)_{\varsigma},$$

ρ et ς étant assujettis à l'équation de condition

(188) $$\rho + \varsigma = \frac{h+1-N}{2};$$

2° pour $i=1$

(189) $$\mathcal{C} = \sum (-1)^{\varsigma} N(g+1)_{\rho} (h-g)_{\varsigma},$$

ρ et ς étant toujours liés entre eux par l'équation (188). Pareillement, si l'on suppose $n'=1$, la formule (158) donnera 1° pour $i=l$,

(190) $$\mathcal{C}' = \sum (-1)^{\varsigma'} N'(g')_{\rho'} (h-g'+1)_{\varsigma'}$$
$$- hg' \sum (-1)^{\varsigma'} (g'-1)_{\rho'-1} (h-g')_{\varsigma'} + (h+l) \sum (-1)^{\varsigma'} (g'+1)_{\rho'} (h-g'-1)_{\varsigma'},$$

ρ' et ς' étant assujettis à l'équation de condition

(191) $$\rho' + \varsigma' = \frac{h+1-N'}{2};$$

2° pour $i=h-1$

(192) $$\mathcal{C}' = \sum (-1)^{\varsigma'} (g'+1)_{\rho'} (h-g')_{\varsigma'},$$

ρ' et ς' étant toujours liés entre eux par l'équation (191).

Il est bon d'observer qu'en étendant la signe $\sum$ à toutes les valeurs entières, nulles ou positives, de g, g', j, on a

(193) $$\sum (-1)^{g+g'} (h)_{j,g-j,g'-j} \mathfrak{D}$$
$$= \tfrac{1}{2} \{ \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} + (\cos \Delta_{0,\frac{\pi}{2}} + \cos \Delta_{\frac{\pi}{2},0}) \sqrt{-1} - \cos \Delta_{0,0} \}^h,$$

(194) $$\sum (-1)^{g+g'}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \left\{ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} - (\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0})\sqrt{-1} - \cos\Delta_{0,0} \right\}^h,$$

(195) $$\sum (-1)^{g}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \left\{ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} - (\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0})\sqrt{-1} + \cos\Delta_{0,0} \right\}^h,$$

(196) $$\sum (-1)^{g'}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \left\{ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} + (\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0})\sqrt{-1} + \cos\Delta_{0,0} \right\}^h.$$

Donc, si l'on pose pour abréger

(197) $$\left\{ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{0,0} + (\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0})\sqrt{-1} \right\}^h = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2\sqrt{-1},$$

(198) $$\left\{ \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} + \cos\Delta_{0,0} + (\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} - \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0})\sqrt{-1} \right\}^h = \mathcal{C}'_1 + \mathcal{C}'_2\sqrt{-1},$$

on aura

(199) $$\begin{cases} \sum \cos\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \sum (-1)^{g+g'}\cos\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \mathcal{C}_1, \\ \sum \sin\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = -\sum (-1)^{g+g'}\sin\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \mathcal{C}_2; \end{cases}$$

(200) $$\begin{cases} \sum (-1)^{g}\cos\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \sum (-1)^{g}\cos\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \mathcal{C}'_1 \\ \sum (-1)^{g'}\sin\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = -\sum (-1)^{g}\sin\frac{\pi(g+g')}{2}\,(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathfrak{D} = \mathcal{C}'_2. \end{cases}$$

Cela posé, la partie de Σ qui correspond à des valeurs de N, n, N', n' propres à vérifier la condition

(201) $$\frac{N}{n+h} = \frac{N'}{n'+h} = \pm 1$$

aura évidemment pour la forme

(202) $$\frac{\pi^l}{a^l}\sum (-1)^{i+\frac{n+h}{2}\frac{n}{n+h}}\left(\frac{K+h}{2}\right)_l \frac{(l)_i}{2^{n+n'+h}\,1\,2\ldots l}\,\frac{\partial^l}{\partial x_1^{n-i}\,\partial x_2^{i}\,\partial y_1^{n'-i'}\,\partial y_2^{i'}}\left\{ \mathcal{C}_1\cos(N\Pi + N'\Pi') \mp \mathcal{C}_2\sin(N\Pi + N'\Pi') \right\},$$

les valeurs de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ étant déterminées par les formules (198), (199), tandis que la partie de Σ correspondante à des valeurs de N, n, N', n' propres à vérifier la condition

$$-\frac{N}{n+h}=\frac{N'}{n+h}=\pm 1 \tag{208}$$

Sera

$$\frac{m!}{a!}\sum(-1)^{i+\frac{\kappa-h}{2}}\frac{\kappa}{\kappa+h}\left(\frac{\kappa+h}{2}\right)_h\frac{(l)_i}{2^{n+\kappa i}}\frac{\beta^l}{i\,\kappa\,l}\,\mathcal{C}\mathcal{C}'\varepsilon^{n\pi}\varepsilon'^{m'}\frac{\partial^l\Theta_K}{\partial\beta^l}\left\{\mathcal{S}_1\cos(N\Pi+N'\Pi')\pm\mathcal{S}_2\sin(N\Pi+N'\Pi')\right\}; \tag{206}$$

les valeurs de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ étant encore déterminées par les formules (181), (189).

Considérons spécialement le cas où l'on a

$$\gamma=0,\qquad \gamma'=0. \tag{209}$$

Alors, en posant pour abréger

$$\varpi-\varpi'+\varphi-\varphi'=\Pi, \tag{206}$$

on trouvera

$$\begin{aligned}\cos\Delta &= \cos(\varphi-\varpi-\varphi'+\varpi'+\Pi)\\ &= \cos\Pi\left\{\cos(\varphi-\varpi)\cos(\varphi'-\varpi')+\sin(\varphi-\varpi)\sin(\varphi'-\varpi')\right\}-\sin\Pi\left\{\sin(\varphi-\varpi)\cos(\varphi'-\varpi')-\sin(\varphi'-\varpi')\cos(\varphi-\varpi)\right\};\end{aligned} \tag{207}$$

et par conséquent

$$\cos\Delta_{0,0}=\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}=\cos\Pi,\qquad \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}=-\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}=\sin\Pi; \tag{204}$$

$$\mathcal{S}_1+\mathcal{S}_2\sqrt{-1}=2^h(\cos\Pi+\sqrt{-1}\sin\Pi)^h. \tag{189}$$

$$\mathcal{S}_1=0,\quad \mathcal{S}_2=0,\qquad \mathcal{S}_1=2^h\cos h\Pi,\quad \mathcal{S}_2=2^h\sin h\Pi. \tag{210}$$

Donc l'expression (202) s'évanouira, tandis que l'expression (208) sera réduite à

$$\frac{m!}{a!}\sum(-1)^{i+\frac{\kappa-h}{2}}\frac{\kappa}{\kappa+h}\left(\frac{\kappa+h}{2}\right)_h\frac{(l)_i}{2^{n+\kappa i}}\,\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\beta^l}{i\,\kappa\,l}\frac{\partial^l\Theta_K}{\partial\beta^l}\,\varepsilon^{n\pi}\varepsilon'^{m'}\cos(N\Pi+N'\Pi'\mp h\Pi), \tag{211}$$

les valeurs de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ étant toujours déterminées par les formules (184), (189).

Il importe d'observer que, dans la formule (211), les termes correspondants à des valeurs de N, égales au signe près, mais affectées de signes contraires, sont égaux deux à deux.

Cherchons en particulier les termes qui, dans l'expression (211), correspondent à

$$N=-2,\quad N'=5,\quad K=1.$$

$\kappa-h$ devant être pair, et $h=$ ou $<\kappa$, on aura nécessairement $h=1$.

Par suite l'équation

$$-\frac{N}{n+h} = \frac{N'}{n'+h} = 1$$

donnera

$$n = -N - h = l, \qquad n' = N' - h = k.$$

Donc les termes cherchés seront compris dans la somme

$$\frac{m!}{\alpha!} \sum \frac{(-1)^i (l)_i}{2^\delta} \mathcal{C}\mathcal{C}' \frac{\theta^l}{1.2\ldots l} \frac{\partial^l \Theta_i}{\partial \theta^l} \varepsilon^{k\theta} \cos(S\Pi - \Sigma\Pi - S\Sigma), \tag{212}$$

les valeurs de $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ étant

$$\begin{cases} \mathcal{C} = \sum [1]_\mu \frac{(n+\nu)}{1.2\ldots\nu} \frac{\zeta^{\nu+\mu}}{1.2\ldots\mu}, \\ \mathcal{C}' = \sum [l+2]_{\mu'} \frac{(S-\nu')}{1.2\ldots\nu'} \frac{\zeta^{\nu'+\mu'}}{1.2\ldots\mu'}; \end{cases} \tag{213}$$

et les nombres $\nu, \mu, i, \nu', \mu', l-i$ étant assujettis aux conditions (180), (180), ou

$$\mu + \nu + i = 1, \qquad \mu' + \nu' + l - i = k. \tag{214}$$

D'ailleurs on tirera des formules (213), (214), 1° en posant $i = 0$,

$$\mathcal{C} = 2, \qquad \mathcal{C}' = \sum [l+2]_{k-l-\nu'} \frac{(S-\nu)}{1.2\ldots\nu'} \frac{\zeta^{\nu'+k-l}}{1.2\ldots\nu'},$$

2° en posant $i = 1$

$$\mathcal{C} = 1, \qquad \mathcal{C}' = \sum [l+2]_{S-l-\nu'} \frac{(S-\nu')}{1.2\ldots\nu'} \frac{\zeta^{\nu'+S-l}}{1.2\ldots\nu'}.$$

Par conséquent chacun des termes en question aura pour valeur la formule

$$\frac{m!\Gamma}{\alpha!} \sum \frac{\partial^l \Theta_i}{\partial \theta^l} \varepsilon^{k\theta} \cos(\ldots - \Sigma\Pi - S\Sigma), \tag{215}$$

la valeur de Γ étant

$$\Gamma = \frac{1}{2^\delta (1.2\ldots l)} \sum \left\{ 2 [l+2]_{k-l-\nu'} - l [l+2]_{S-l-\nu'} \right\} \frac{(S-\nu')}{1.2\ldots\nu'} \frac{\zeta^{\nu'+k}}{1.2\ldots\nu'}. \tag{216}$$

Cela posé, on trouvera pour $k = 0$

pour $l=1$

pour $l=2$

pour $l=3$

pour $l=4$

pour $l=5$

Donc, en doublant chaque terme, puis ajoutant les différents termes entre eux, on trouvera, pour la partie de P qui a pour facteurs $\varepsilon, \varepsilon'^3$ et $\cos(5\Pi' - 2\Pi - \Pi_1)$,

(217) $\frac{m'}{m}\frac{3}{2}\frac{15}{64}\left\{\frac{5}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Theta_1} - \frac{5}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Theta_2} + \frac{5}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Theta_3} - \frac{5}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Theta_4} + \frac{5}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\Theta_5}\right\}\cos(5\Pi' - 2\Pi - \Pi_1)$,

ce qui est exact.

§ 3. Sur les développements de la fonction R en séries convergentes.

Comme nous l'avons déjà remarqué, la fonction R renferme deux espèces de termes, savoir des termes de la forme

$$P = \frac{m' r \cos s^{\lambda}}{r'^2}, \tag{1}$$

et des termes de la forme $-P$, la valeur de P étant

$$P = \frac{m'}{V(r^2 - 2rr'\cos s + r'^2)}. \tag{2}$$

La valeur de P, déterminée par l'équation (1), peut être présentée sous la forme

$$P = \frac{m'}{a'^2}\frac{a}{a'}\sum_{-\infty}^{\infty}(A_{N'} + B_{N'})(A'_{N'} + B'_{N'})\cos\Delta_{N,N'}, \tag{3}$$

les valeurs de $A_{N'}$, $B_{N'}$, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ étant fournies par les formules (91) et (113) du § 2, dans lesquelles les coefficients n, n' augmentés de la unité fournissent toujours les valeurs numériques de N, N'. On peut aussi au formules (91) et (113) substituer les formules (100), (102), (105), (108), et déterminer immédiatement, à l'aide de ces formules, les valeurs de $A_{N'}$, $B_{N'}$, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ en fonction de ε ou ε'.

Quant à la fonction P déterminée par l'équation (2), le développement, que nous en avons donné dans le second paragraphe, doit être employé seulement dans le cas où le rapport

$$\theta = \frac{r}{a'} \tag{4}$$

est sensiblement inférieur à l'unité, les excentricités ε, ε' étant elles-mêmes plus petites que $0,66742\ldots$ ou $\frac{2}{3}$ environ. Mais même alors, le rapport

$$\frac{r}{r'} = \frac{a(1-\varepsilon\cos\psi)}{a'(1-\varepsilon'\cos\psi')} \tag{5}$$

dont la plus grande valeur est

$$\frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon''} \tag{6}$$

soit inférieur à l'unité. Or, quand $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{2}{5}$, l'expression (6) devient

$$\frac{\theta\left(1+\frac{2}{5}\right)}{1-\frac{2}{5}} = \frac{7}{5}\theta. \tag{7}$$

Donc alors il est nécessaire que θ reste inférieur à $\frac{1}{7}$.

Si les excentricités $\varepsilon, \varepsilon'$ sont environ $\frac{1}{4}$, comme pour les petites planètes, l'expression (6) deviendra

$$\frac{\theta\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}\theta,$$

et θ devra rester inférieur à $\frac{3}{5}$. Cette condition n'étant pas remplie pour les petites planètes, le développement de Π, employé dans le paragraphe précédent ne peut leur être appliqué.

Pour retrouver, dans tous les cas possibles, un développement convergent de la fonction Γ déterminée par l'équation (2), il suffit de décomposer le trinome

$$r^2 - 2rr'\cos\Delta + r'^2 = (r - r'\cos\Delta)^2 + r'^2\sin^2\Delta, \tag{4}$$

qui est toujours positif, en deux parties dont l'une soit positive, et offre une valeur numérique supérieure à celle de la seconde, puis de développer la puissance $-\frac{1}{2}$ du trinome suivant les puissances ascendantes du rapport de la seconde partie à la première. En effet si l'on a

$$r^2 - 2rr'\cos\Delta + r'^2 = \rho_1 - \rho_2,$$

ρ_1 étant positif, et $\pm\rho_2 < \rho_1$, on trouvera

$$(\rho_1 - \rho_2)^{-\frac{1}{2}} = \rho_1^{-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_2}{\rho_1} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2 + \cdots\right\}, \tag{9}$$

et la série comprise dans le second membre de l'équation (g) restera convergente, tant que le rapport $\pm \frac{\rho_2}{\rho_1}$ restera inférieur à l'unité. Elle sera d'ailleurs d'autant plus convergente que le rapport $\pm \frac{\rho_2}{\rho_1}$ sera plus petit.

Puisque l'intégrale $\int P\,dt$ puisse être aisément calculée, il est nécessaire que, dans le développement de P, les cosinus ne soient tout pas au dénominateur, et par suite il est nécessaire que $\cos\lambda$ soit compris dans le numérateur ρ_2 de la fraction $\frac{\rho_2}{\rho_1}$. On y parviendra en décomposant la trinome (8) en deux termes de l'une des trois manières suivantes

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\lambda,$$
$$(r+r')^2 - 2rr'(1+\cos\lambda),$$
$$(r-r')^2 + 2rr'(1-\cos\lambda);$$

on voit que l'on pourra prendre

$$\rho_1 = r^2 + r'^2, \qquad \rho_2 = 2rr'\cos\lambda, \tag{10}$$

ou

$$\rho_1 = (r+r')^2, \qquad \rho_2 = 2rr'(1+\cos\lambda), \tag{11}$$

ou bien

$$\rho_1 = (r-r')^2, \qquad \rho_2 = 2rr'(1-\cos\lambda). \tag{12}$$

Les développements correspondants de P seront

$$P = m'\left\{ \frac{1}{(r^2+r'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{2rr'\cos\lambda}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{(2rr'\cos\lambda)^2}{(r^2+r'^2)^{\frac{5}{2}}} + \text{etc...}\right\}, \tag{13}$$

$$P = m'\left\{ \frac{1}{r+r'} + \frac{1}{2}\frac{2rr'(1+\cos\lambda)}{(r+r')^3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{[2rr'(1+\cos\lambda)]^2}{(r+r')^5} + \text{etc...}\right\}, \tag{14}$$

et

$$P = \frac{m'}{\sqrt{(r-r')^2}}\left\{ 1 - \frac{1}{2}\frac{2rr'(1-\cos\lambda)}{(r-r')^2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{[2rr'(1-\cos\lambda)]^2}{(r-r')^4} - \text{etc...}\right\}. \tag{15}$$

Dans le premier cas, le rapport

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2rr'\cos\lambda}{r^2+r'^2} \tag{16}$$

serait compris entre les limites

$$(17) \qquad -\frac{2rr'}{r^2+r'^2}, \qquad +\frac{2rr'}{r^2+r'^2}$$

dont la valeur numérique

$$(18) \qquad \frac{2rr'}{r^2+r'^2} = 1 - \frac{(r-r')^2}{r^2+r'^2}$$

ne peut surpasser l'unité. Il y aplus, comme

$$r^2+r'^2-2rr'\cos\omega = (r+r')^2 - 2rr'(1+\cos\omega)$$

est toujours un positif, et ne peut s'évanouir, si les planètes ne se rencontrent pas, il est clair que, hors le cas du choc, la valeur numérique de $2rr'\cos\omega$ sera constamment inférieure à celle de $r^2+r'^2$, et celle de $2rr'(1+\cos\omega)$ à celle de $(r+r')^2$. Donc, en écartant le cas où les planètes se choqueraient, les séries comprises dans les secondes membres des formules (13), (14) seront toujours convergentes. Ajoutons que, dans la série (14), le rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ sera compris entre les limites

$$(19) \qquad 0, \qquad \frac{4rr'}{(r+r')^2} = 1 - \frac{(r-r')^2}{(r+r')^2},$$

dont la seconde surpasse l'expression (18), puisque $(r+r')^2$ surpasse $r^2+r'^2$, et qu'on a constamment $\frac{(r-r')^2}{(r+r')^2}$ est inférieur à $\frac{(r-r')^2}{r^2+r'^2}$. Donc, pour

$$\cos\omega = 1,$$

la série comprise dans la formule (14) convergera moins rapidement que la série comprise dans la formule (13).

En général, si l'on pose

$$(20) \qquad \rho_1 = r^2+r'^2+\delta, \qquad \rho_2 = 2rr'\cos\omega+\delta,$$

δ étant positif, on trouvera

$$(21) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2rr'\cos\omega+\delta}{r^2+r'^2+\delta} = 1 - \frac{r^2-2rr'\cos\omega+r'^2}{r^2+r'^2+\delta},$$

Par suite le rapport $\frac{\rho_2}{\rho_1}$, qui deviendrait positif pour des valeurs positives de $\cos\lambda$, serait alors plus grand que

$$1 - \frac{r^2 - 2rr'\cos\lambda + r'^2}{r^2 + r'^2} = \frac{2rr'\cos\lambda}{r^2 + r'^2}.$$

Donc le développement de P, correspondant aux valeurs de ρ_1, ρ_2 fournies par les équations (20), convergerait moins rapidement, pour des valeurs positives de $\cos\lambda$, que la série comprise dans la formule (14).

Supposons maintenant

$$\rho_1 = r^2 + r'^2 - \delta, \qquad \rho_2 = 2rr'\cos\lambda - \delta, \tag{22}$$

δ étant positif, mais plus petit que $r^2 + r'^2$. On aura

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{r^2 - 2rr'\cos\lambda + r'^2}{r^2 + r'^2 - \delta}, \tag{23}$$

ou, ce qui revient au même,

$$-\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r^2 - 2rr'\cos\lambda + r'^2}{r^2 + r'^2 - \delta} - 1. \tag{24}$$

Alors, pour des valeurs négatives de $\cos\lambda$, ρ_2 sera négatif, et la valeur numérique de $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ plus grande que celle de

$$\frac{r^2 - 2rr'\cos\lambda + r'^2}{r^2 + r'^2} - 1 = -\frac{2rr'\cos\lambda}{r^2 + r'^2}.$$

Donc le développement de P, correspondant aux valeurs de ρ_1, ρ_2 fournies par les équations (22), convergera moins rapidement, pour des valeurs négatives de $\cos\lambda$, que la série comprise dans la formule (13).

Observons encore que le second membre de l'équation (24) surpassera l'unité, si l'on a

$$r^2 - 2rr'\cos\lambda + r'^2 > 2(r^2 + r'^2 - \delta),$$

ou, ce qui revient au même,

(25) $\qquad \delta > \dfrac{r^2+r'^2+2rr'\cos\Delta}{2}$

c'est-à-dire pour finir les Δ, $\delta = 2rr'$. La formule (22) s'accordant avec les formules (12), et la condition (25) donnera

$$2rr'(1-\cos\Delta) > (r-r')^2,$$

ou

(26) $\qquad \sin\dfrac{\Delta}{2} > \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(r'-r)^2}{rr'}}.$

Donc la série, comprise dans la formule (19), cessera d'être convergente, dès que l'angle Δ surpassera la limite

(27) $\qquad 2\arcsin\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(r'-r)^2}{rr'}}.$

Il suit de cette observation que le développement (17) de la fonction Σ, comparé à l'un quelconque des développements du même genre, convergera toujours plus rapidement pour certaines valeurs de $\cos\Delta$, qui sont les seules favorables à la convergence; 2° que les développements (17) et (18) convergent pour toutes les valeurs de $\cos\Delta$; 3° que le développement (19) cesse de converger pour certaines valeurs négatives de $\cos\Delta$. Donc la formule (17) est celle qui convient le mieux, lorsque $\cos\Delta$ reste arbitraire. Mais, il est clair que, si l'on employait divers développements pour déterminer les valeurs de Σ correspondantes à diverses époques, on pourrait souvent avantageusement de la formule (18), lorsque t aurait une valeur telle que $-\cos\Delta$ fût peu différent de l'unité, et de la formule (19) lorsque $\cos\Delta$ deviendrait sensiblement égal à 1.

J'aime voir maintenant comment on peut développer le second membre de la formule (17) suivant les puissances entières de $\varepsilon, \varepsilon'$, et les sinus ou cosinus des arcs multiples de

$$\Pi = \alpha t + c, \qquad \Pi' = \alpha' t + c'.$$

Ce que nous disons à ce sujet sera également applicable aux seconds membres des formules (14), (15).

Si l'on suppose d'abord

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' = 0,$$

la formule (13) donnera

$$(24) \qquad P = m' \left\{ \frac{1}{(a^2+a'^2-2aa'\cos\lambda)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{2aa'\cos\lambda}{(a^2+a'^2-2aa'\cos\lambda)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{(2aa'\cos\lambda)^2}{(a^2+a'^2-2aa'\cos\lambda)^{\frac{5}{2}}} + \text{etc.} \ldots \right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(25) \qquad P = m' \left\{ \Theta_0 + \Theta_1 \cos\lambda + \Theta_2 \cos^2\lambda + \Theta_3 \cos^3\lambda + \text{etc.} \ldots \right\} = m' \sum_{K=0}^{K=\infty} \Theta_K \cos^K\lambda,$$

la valeur de Θ_K étant

$$(30) \qquad \Theta_K = \frac{1.3 \ldots (2K-1)}{2.4 \ldots 2K} \frac{(2aa')^K}{(a^2+a'^2)^{K+\frac{1}{2}}}.$$

Dans le même cas, on aura

$$\varpi - \varpi = \psi = \Pi, \qquad \varpi' - \varpi' = \psi' = \Pi',$$

et par suite

$$(31) \qquad \cos\lambda = \cos\Delta_{\Pi,\Pi'}.$$

Donc la formule (25) donnera

$$(32) \qquad P = m' \sum_{K=0}^{K=\infty} \Theta_K \cos^K \Delta_{\Pi,\Pi'}.$$

Si l'on suppose en outre

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0,$$

on trouvera

$$(33) \qquad \lambda = p - p' + \varphi - \varphi' = \Pi - \Pi' + \Gamma,$$

la valeur de Γ étant

$$(34) \qquad \Gamma = \varpi - \varpi' + \varphi - \varphi'.$$

On aura d'ailleurs

$$\cos^K\lambda = \frac{1}{2^K}\left(e^{\lambda\sqrt{-1}} + e^{-\lambda\sqrt{-1}}\right)^K = \frac{1}{2^K} S(K)_\rho e^{(K-2\rho)\lambda\sqrt{-1}} = \frac{1}{2^K} S(K)_\rho \cos(K-2\rho)\lambda;$$

ou, ce qui revient au même,

$$(35) \qquad \cos^K\lambda = \frac{1}{2^K} S(K)_{\frac{K-N}{2}} \cos N\lambda,$$

la série S s'étendant à toutes les valeurs positives ou négatives de N qui rendent K-N divisible par 2, depuis N = -K jusqu'à N = K. On aura donc par suite

$$P = 2m' S \frac{\Theta_K}{2^K} (K)_{\frac{K-N}{2}} \cos N(\Pi - \Pi' + \Lambda) \tag{29}$$

$$= 2m' \left\{ \frac{1}{2}\Theta_0 + \Theta_1 \cos(\Pi - \Pi' + \Lambda) + \frac{\Theta_2}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos 2(\Pi - \Pi' + \Lambda)\right] + \frac{\Theta_3}{4}\left[\cos(\Pi - \Pi' + \Lambda) + \cos 3(\Pi - \Pi' + \Lambda)\right] + \dots \right\}.$$

Il est bon d'observer que, si, avec M. Legendre, on désigne par $\Gamma(K)$ l'intégrale définie

$$\int_0^\infty x^{K-1} e^{-x} dx,$$

on aura

$$\frac{1.3\dots(2K-1)}{2.4\dots 2K} = \frac{\Gamma(K+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(K)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(K+\frac{1}{2})}{\Gamma(K)},$$

et par suite

$$\Theta_K = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(K+\frac{1}{2})}{\Gamma(K)} \frac{(2aa')^K}{(a^2+a'^2)^{K+\frac{1}{2}}}.$$

Lorsque K a une valeur très considérable, on a sensiblement, en vertu d'une propriété connue des fonctions Γ,

$$\frac{\Gamma(K+\frac{1}{2})}{\Gamma(K)} = K^{\frac{1}{2}}.$$

Par suite, la valeur précédente de Θ_K se réduit sensiblement à

$$\Theta_K = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa')^K}{(a^2+a'^2)^{K+\frac{1}{2}}}, \tag{32}$$

et, si, dans le second membre de la formule (32), on néglige tous les termes où l'exposant K de cos V n'est pas inférieur à un nombre donné n, l'erreur commise sera sensiblement égale à

$$\left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa'\cos V)^K}{(a^2+a'^2)^{K+\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{2aa'\cos V}{a^2+a'^2} + \left(\frac{2aa'\cos V}{a^2+a'^2}\right)^2 + \text{etc.} \dots \right\},$$

ou, ce qui revient au même, à

$$\left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa')^K}{(a^2+a'^2)^{K+\frac{1}{2}}} \frac{\cos^K V}{1 - \frac{2aa'\cos V}{a^2+a'^2}} = \left(\frac{K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2aa'\cos V}{a^2+a'^2}\right)^K \frac{\sqrt{a^2+a'^2}}{a^2 - 2aa'\cos V + a'^2}; \tag{33}$$

par conséquent elle deviendra très petite, pour de grandes valeurs de n. Si la différentielle peut être da', cette erreur différera très peu de

$$\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{da}{a} \frac{\cos^n \frac{\Lambda}{2}}{1-\cos\Lambda}.$$

Lorsque $\frac{a'}{a}$ ou $\frac{a}{a'}$ est sensiblement inférieur à l'unité, on peut en dire autant du rapport

$$\frac{2aa'}{a^2+a'^2};$$

par conséquent l'expression (34) finit par décroître pour des valeurs croissantes de K, et, si l'on ordonne la valeur de Σ fournie par l'équation (30) suivant les cosinus des multiples de l'arc $\Pi-\Pi'+\Pi$, la série ainsi obtenue sera convergente. Effectivement, dans cette série, le coefficient de

$$\cos N(\Pi-\Pi'+\Pi),$$

N désignant un nombre entier quelconque, supérieur à zéro, sera

$$(37) \quad \frac{1}{2}\mathcal{S}\frac{\Theta_K}{2^K}(K) = \frac{1}{2^{N-1}}\left\{(N)_0\,\Theta_N + \frac{1}{4}(N+2)_1\,\Theta_{N+2} + \frac{1}{4^2}(N+4)_2\,\Theta_{N+4} + \text{etc.}\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{N-1}}\left\{\Theta_N + \frac{1}{4}\frac{N+2}{1}\Theta_{N+2} + \frac{1}{4^2}\frac{(N+4)(N+3)}{1\cdot 2}\Theta_{N+4} + \text{etc.}\ldots\ldots\right\}$$

$$= \frac{\Theta_N}{2^{N-1}}\left\{1 + \frac{1}{2}\frac{N+2}{2}\frac{(2N+1)(2N+3)}{(2N+2)(2N+4)}\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\frac{(N+4)(N+3)}{2\cdot 4}\frac{(2N+1)(2N+3)(2N+5)(2N+7)}{(2N+2)(2N+4)(2N+6)(2N+8)}\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^4 + \ldots\right\}$$

Θ_N, quoique, dans la série que renferme le dernier membre de la formule (37), l'entier N commence par croître, quand N a une valeur considérable, néanmoins, si le rapport $\frac{2aa'}{a^2+a'^2}$ est inférieur à l'unité, cette série sera convergente. Car le rapport d'un terme au précédent finira par différer très peu de

$$\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^2.$$

Daplus, si l'on suppose, pour fixer les idées $a<a'$ et $\frac{a}{a'}=0$, il est clair que la valeur de l'expression (37) devra se réduire au coefficient de

$\cos N\nu$ dans l'équation (12k) du § 2; et, par suite, devenir à très peu près, pour de grandes valeurs de N,

$$2\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^N}{\sqrt{1-\theta}} = \left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2\alpha^N}{\alpha'^{N-1}\sqrt{\alpha'-\alpha}}. \tag{24}$$

Or il est clair que la série qui aurait pour terme général

$$2\left(\frac{N}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^N}{\sqrt{1-\theta}}\cos N(\Gamma-\Gamma'+\Pi) \tag{39}$$

sera convergente, si θ est sensiblement inférieur à l'unité. Mais, comme l'expression (39) devient infinie pour $\theta=1$, on devra renoncer à développer P suivant les cosinus des multiples de $\Gamma-\Gamma'+\Pi$, si θ diffère peu de l'unité. Toutefois, dans le cas dont il s'agit, et même dans celui où l'on aurait

$$\theta=1, \quad \alpha'=\alpha,$$

on pourra continuer de développer P en une suite ordonnée de la forme

$$\Theta_K \cos K\Delta_{\Gamma,\Gamma'},$$

en arrêtant le développement à une valeur de K telle que l'on puisse sans erreur sensible négliger le reste; puis développer

$$\cos K\Delta_{\Gamma,\Gamma'}$$

en une suite ordonnée suivant les cosinus des multiples de l'arc $\Gamma-\Gamma'+\Pi$, laquelle suite sera toujours composée d'un nombre fini de termes. On pourra donc alors continuer de développer la fonction P elle-même suivant les cosinus des multiples de $\Gamma-\Gamma'+\Pi$, pourvu que l'on écrive

$$P = \frac{m'}{r\left(a^2-2aa'\cos\Delta+a'^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \tag{40}$$

ou plus généralement

$$P = \frac{m'}{r\left(r^2-2rr'\cos\Delta+r'^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{41}$$

et qu'ensuite de poser $\theta = 1$, on rejette, dans le coefficient de $\cos M(\mathrm{I}+\mathrm{I}')$, couples généralement dans les coefficients des sinus et cosinus des multiples de I et de I', tous les termes où l'exposant de K surpasse un nombre donné. Ce dernier nombre étant supposé très grand, le développement de la fonction Σ différera très peu de cette même fonction, et l'erreur commise sera très petite, quoique les termes négligés donnent des coefficients des sinus et cosinus de tous les multiples de I et de I' offrant des sommes très considérables.

Lorsque l'on n'a pas

$$\gamma = 0, \quad \gamma' = 0,$$

alors, pour développer

$$\cos^K \Delta_{\mathrm{I},\mathrm{I}'}$$

suivant les sinus et cosinus des arcs multiples de I et de I', afin que le second membre de la formule (127) puisse être facilement intégré par rapport à τ, il suffit de recourir aux considérations suivantes.

Soit $\mathrm{F}(\mathrm{I})$ une fonction linéaire de

$$\cos\mathrm{I}, \ \cos 2\mathrm{I}, \ \ldots \ \cos K\mathrm{I}; \quad \sin\mathrm{I}, \ \sin 2\mathrm{I}, \ \ldots \ \sin K\mathrm{I}. \tag{k2}$$

Cette fonction, renfermant $2K+1$ parametres, savoir un terme constant et les coefficients des expressions (k2), sera complétement déterminée quand on en connaîtra $2K+1$ valeurs particulières correspondantes à $2K+1$ valeurs de I. Or, si l'on suppose ces valeurs de I équidifférentes, la première étant I_0, et la différence de deux valeurs consécutives étant

$$\frac{2\pi}{2K+1},$$

on les déduira toutes de la formule

$$\mathrm{I}_0 + \frac{2\pi l}{2K+1}, \tag{d3}$$

en attribuant successivement à l les valeurs entières

$$0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots 2K-1, 2K,$$

ou, ce qui revient au même, $2K+1$ valeurs consécutives choisies arbitrairement dans la progression arithmétique

$$\ldots\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots,$$

par exemple, les suivantes

$$(45) \qquad -K, -(K-1), \ldots -1, 0, 1, \ldots (K-1), K.$$

On pourra donc exprimer la fonction $f(T)$ par le moyen des valeurs particulières

$$(45') \quad f\left(T_0 - \frac{2K\pi}{2K+1}\right), \ldots\ldots f\left(T_0 - \frac{2\pi}{2K+1}\right), f(T_0), f\left(T_0 + \frac{2\pi}{2K+1}\right), \ldots\ldots f\left(T_0 + \frac{2K\pi}{2K+1}\right),$$

correspondantes aux valeurs

$$(46) \quad T_0 - \frac{2K\pi}{2K+1}, \ldots\ldots\ldots T_0 - \frac{2\pi}{2K+1}, \quad T_0, \quad T_0 + \frac{2\pi}{2K+1}, \ldots\ldots\ldots T_0 + \frac{2K\pi}{2K+1},$$

de la variable T. On trouvera effectivement, pour $K=1$,

$$f(T) =$$

$$\frac{1}{3}\left\{ [1 + 2\cos(T - T_0 + \tfrac{2\pi}{3})] f(T_0 - \tfrac{2\pi}{3}) + 3 f(T_0) + [1 + 2\cos(T - T_0 - \tfrac{2\pi}{3})] f(T_0 + \tfrac{2\pi}{3}) \right\},$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(T) = \frac{1}{3} \sum_{l=-1}^{l=1} \sum_{h=-1}^{h=1} e^{h(T - T_0 - \frac{2l\pi}{3})\sqrt{-1}} f\left(T_0 + \frac{2l\pi}{3}\right);$$

pour $K=2$,

$$f(T) = \frac{1}{5} \sum_{l=-2}^{l=2} \sum_{h=-2}^{h=2} e^{h(T - T_0 - \frac{2l\pi}{5})\sqrt{-1}} f\left(T_0 + \frac{2l\pi}{5}\right);$$

et généralement, pour une valeur quelconque de K,

$$(47) \qquad f(T) = \frac{1}{2K+1} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{h=-K}^{h=K} e^{h(T - T_0 - \frac{2l\pi}{2K+1})\sqrt{-1}} f\left(T_0 + \frac{2l\pi}{2K+1}\right),$$

le signe sommatoire $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs entières, positives nulles ou négatives de l et de h, depuis les valeurs négatives $-K$ jusqu'à la valeur positive K. Pour vérifier l'exactitude de la formule (47), il suffit d'observer que le second membre est, tout comme le premier, une fonction

linéaire des quantités (42), qu'une semblable fonction, renfermant $2K+1$ coefficients peut être complétement déterminée à l'aide de $2K+1$ valeurs particulières correspondantes aux valeurs de Π comprises dans la suite (46), et que la formule (47) subsiste pour chacune de ces valeurs de Π, attendu que, l', l'' désignant deux valeurs de l prises dans la suite (44), on aura

$$\sum_{h=-K}^{h=K} e^{\frac{2h(l''-l')\pi}{2K+1}\sqrt{-1}} = 0,$$

si l' diffère de l'', et

$$\sum_{h=-K}^{h=K} e^{\frac{2h(l''-l)\pi}{2K+1}\sqrt{-1}} = 2K+1,$$

si $l'=l''$. On démontrerait de la même manière l'exactitude de l'équation

$$(48) \qquad f(\Pi) = \frac{1}{2(K+1)} \sum_{l=-K}^{l=K+1} \sum_{h=-K}^{h=K} e^{h(\Pi-\Pi_0-\frac{l\pi}{K+1})\sqrt{-1}} f\left(\Pi_0+\frac{l\pi}{K+1}\right),$$

qui fournit les valeurs générales de $f(\Pi)$ exprimées à l'aide de $2K+2$ valeurs particulières correspondantes aux valeurs de Π comprises dans la formule

$$(49) \qquad \Pi_0+\frac{l\pi}{K+1},$$

l étant un des termes de la suite

$$(50) \qquad -K, -(K-1), \ldots\ldots -1, \ 0, \ 1, \ldots\ldots (K-1), \ K, \ K+1.$$

Concevons à présent que $f(\Pi)$ se compose seulement de termes proportionnels aux quantités

$$(51) \qquad \begin{cases} \cos K\Pi, \ \cos(K-1)\Pi, \ \cos(K-2)\Pi, \ \ldots\ldots \\ \sin K\Pi, \ \sin(K-1)\Pi, \ \sin(K-2)\Pi, \ \ldots\ldots. \end{cases}$$

On trouvera

$$f\left(\Pi_0+\frac{l-(K+1)}{K+1}\pi\right) = f\left(\Pi_0+\frac{l\pi}{K+1}-\pi\right) = (-1)^K f\left(\Pi_0+\frac{l\pi}{K+1}\right),$$

et, comme on aura d'ailleurs

$$e^{-h\frac{l-(K+1)}{K+1}\pi\sqrt{-1}} = (-1)^h e^{-\frac{hl\pi}{K+1}\sqrt{-1}}$$

$$\left\{1+(-1)^{K-h}\right\} e^{-h\pi\sqrt{-1}} f(I+\pi) = \left\{1+(-1)^{K-h}\right\} f(I),$$

on tirera de la formule (48)

$$f(I) = \frac{1}{2(K+1)} \sum_{l=0}^{l=K} \sum_{h=-K}^{h=K} \left\{1+(-1)^{K-h}\right\} e^{h(I-I_0-\frac{l\pi}{K+1})\sqrt{-1}} f\left(I_0+\frac{l\pi}{K+1}\right), \tag{52}$$

ou, ce qui revient au même,

$$f(I) = \frac{1}{K+1} \sum_{l=0}^{l=K} \sum_{h=-K}^{h=K} e^{h(I-I_0-\frac{l\pi}{K+1})\sqrt{-1}} f\left(I_0+\frac{l\pi}{K+1}\right), \tag{50}$$

le signe $\sum$ s'étendant aux valeurs entières de h qui vérifient pour la différence $K-h$, depuis la valeur négative $h=-K$, jusqu'à la valeur positive $h=K$.

L'équation (47), étant nulle, quelle que soit la valeur attribuée à I_0, continuera de subsister, si l'on y remplace I_0 par zéro, ou même, I_0 par I. On aura donc encore

$$f(I) = \frac{1}{2K+1} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{h=-K}^{h=K} e^{h(I-\frac{2l\pi}{2K+1})\sqrt{-1}} f\left(\frac{2l\pi}{2K+1}\right), \tag{54}$$

et

$$f(I) = \frac{1}{2K+1} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{h=-K}^{h=K} e^{-\frac{2lh\pi}{2K+1}\sqrt{-1}} f\left(I+\frac{2l\pi}{2K+1}\right). \tag{55}$$

Il y a plus : comme, dans le second membre de l'équation (47), la somme des termes correspondants à une valeur donnée de h, savoir

$$\frac{1}{2K+1} \sum_{l=-K}^{l=K} e^{h(I-I_0-\frac{2l\pi}{2K+1})\sqrt{-1}} f\left(I_0+\frac{2l\pi}{2K+1}\right) \tag{56}$$

sera précisément la partie de $f(I)$ qui est proportionnelle à

$$e^{hI\sqrt{-1}},$$

il est clair que l'expression (56) devra être elle-même indépendante

Da I_0, et ne sera point altérée quand on y remplacera I_0 par zéro ou par I, endorte qu'on aura identiquement

$$(57)\quad \sum_{l=-K}^{l=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\mathrm{I}_0-\frac{2l\pi}{2K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}_0+\frac{2l\pi}{2K+1}\right) = \sum_{l=-K}^{l=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\frac{2l\pi}{2K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\frac{2l\pi}{2K+1}\right)$$
$$= \sum_{l=-K}^{l=K} e^{-\frac{2hl\pi}{2K+1}\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}+\frac{2l\pi}{2K+1}\right).$$

Parallèlement on tirera de l'équation (56)

$$(58)\quad f(\mathrm{I}) = \frac{1}{K+1}\sum_{l=0}^{l=K}\sum_{h=-K}^{h=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\frac{l\pi}{K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\frac{l\pi}{K+1}\right),$$

$$(59)\quad f(\mathrm{I}) = \frac{1}{K+1}\sum_{l=0}^{l=K}\sum_{h=-K}^{h=K} e^{-\frac{hl\pi}{K+1}\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}+\frac{l\pi}{K+1}\right);$$

et l'on aura encore identiquement

$$(60)\quad \sum_{l=0}^{l=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\mathrm{I}_0-\frac{l\pi}{K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}_0+\frac{l\pi}{K+1}\right) = \sum_{l=0}^{l=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\frac{l\pi}{K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\frac{l\pi}{K+1}\right)$$
$$= \sum_{l=0}^{l=K} e^{-\frac{hl\pi}{K+1}\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}+\frac{l\pi}{K+1}\right),$$

le signe S dans chacune de ces trois formules, s'étendant aux seules valeurs entières de h qui rendent pairs la différence $K-h$.

Soit maintenant $\mathrm{F}(\mathrm{I},\mathrm{I}')$ une fonction linéaire de

$$\cos\mathrm{I},\ \cos 2\mathrm{I},\ \ldots\ \cos K\mathrm{I};\quad \sin\mathrm{I},\ \sin 2\mathrm{I},\ \ldots\ \sin K\mathrm{I};$$
$$\cos\mathrm{I}',\ \cos 2\mathrm{I}',\ \ldots\ \cos K\mathrm{I}';\quad \sin\mathrm{I}',\ \sin 2\mathrm{I}',\ \ldots\ \sin K\mathrm{I}'.$$

On tirera successivement de la formule (57)

$$f(\mathrm{I},\mathrm{I}') = \frac{1}{2K+1}\sum_{l=-K}^{l=K}\sum_{h=-K}^{h=K} e^{h\left(\mathrm{I}-\mathrm{I}_0-\frac{2l\pi}{2K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}_0+\frac{2l\pi}{2K+1},\mathrm{I}'\right),$$

puis

$$f\left(\mathrm{I}+\frac{2l\pi}{2K+1},\mathrm{I}'\right) = \frac{1}{2K+1}\sum_{l'=-K}^{l'=K}\sum_{h'=-K}^{h'=K} e^{h'\left(\mathrm{I}'-\mathrm{I}_0'-\frac{2l'\pi}{2K+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\mathrm{I}_0+\frac{2l\pi}{2K+1},\ \mathrm{I}_0'+\frac{2l'\pi}{2K+1}\right),$$

et par suite

(61) $$\mathcal{F}(\Pi, \Pi') =$$

$$\frac{1}{(2K+1)^2} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} \sum_{h=-K}^{h=K} \sum_{h'=-K}^{h'=K} e^{h(\Pi-\Pi_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(\Pi'-\Pi'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\Pi_0+\frac{2l\pi}{2K+1}, \Pi'_0+\frac{2l'\pi}{2K+1}\Big);$$

puis on en conclura, 1° en remplaçant Π_0 et Π'_0 par zéro

(62) $$\mathcal{F}(\Pi, \Pi') =$$

$$\frac{1}{(2K+1)^2} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} \sum_{h=-K}^{h=K} \sum_{h'=-K}^{h'=K} e^{(h\Pi+h'\Pi')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\frac{2l\pi}{2K+1}, \frac{2l'\pi}{2K+1}\Big),$$

2° en remplaçant Π_0 par Π et Π'_0 par Π'

(63) $$\mathcal{F}(\Pi, \Pi') =$$

$$\frac{1}{(2K+1)^2} \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} \sum_{h=-K}^{h=K} \sum_{h'=-K}^{h'=K} e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\Pi+\frac{2l\pi}{2K+1}, \Pi'+\frac{2l'\pi}{2K+1}\Big).$$

Cela posé, on aura, en vertu de la formule (57),

(64) $$\sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} e^{h(\Pi-\Pi_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(\Pi'-\Pi'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\Pi_0+\frac{2l\pi}{2K+1}, \Pi'_0+\frac{2l'\pi}{2K+1}\Big)$$

$$= \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} e^{(h\Pi+h'\Pi')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\frac{2l\pi}{2K+1}, \frac{2l'\pi}{2K+1}\Big)$$

$$= \sum_{l=-K}^{l=K} \sum_{l'=-K}^{l'=K} e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\Pi+\frac{2l\pi}{2K+1}, \Pi'+\frac{2l'\pi}{2K+1}\Big).$$

Lorsque la fonction $\mathcal{F}(\Pi, \Pi')$ sera complète, on trouvera, proportionnels aux huit quantités

$$\cos K\Pi, \cos(K-2)\Pi, \ldots\ldots; \sin K\Pi, \sin(K-2)\Pi, \ldots\ldots;$$

$$\cos K\Pi', \cos(K-2)\Pi', \ldots\ldots; \sin K\Pi', \sin(K-2)\Pi', \ldots\ldots;$$

on trouvera de même les formules (59), (60), (55) et (57)

(65) $$\mathcal{F}(\Pi, \Pi') =$$

$$\frac{1}{(K+1)^2} \sum_{l=0}^{l=K} \sum_{l'=0}^{l'=K} \sum_{h=-K}^{h=K} \sum_{h'=-K}^{h'=K} e^{h(\Pi-\Pi_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(\Pi'-\Pi'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{K+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\Big(\Pi_0+\frac{l\pi}{K+1}, \Pi'_0+\frac{l'\pi}{K+1}\Big),$$

(66) $$\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathrm{I}') = \frac{1}{(\mathrm{K}+1)^2} \sum_{l=0}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=0}^{l'=\mathrm{K}} \sum_{h=-\mathrm{K}}^{h=\mathrm{K}} \sum_{h'=-\mathrm{K}}^{h'=\mathrm{K}} e^{(h\mathrm{I}+h'\mathrm{I}')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\frac{l\pi}{\mathrm{K}+1}, \frac{l'\pi}{\mathrm{K}+1}\right),$$

(67) $$\mathcal{F}(\mathrm{I},\mathrm{I}') = \frac{1}{(\mathrm{K}+1)^2} \sum_{l=0}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=0}^{l'=\mathrm{K}} \sum_{h=-\mathrm{K}}^{h=\mathrm{K}} \sum_{h'=-\mathrm{K}}^{h'=\mathrm{K}} e^{-\frac{hl+h'l'}{\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\mathrm{I}+\frac{l\pi}{\mathrm{K}+1}, \mathrm{I}'+\frac{l'\pi}{\mathrm{K}+1}\right),$$

la lettre $\mathcal{S}$ s'étendant à toutes les valeurs entières de h, h' qui rendent positives les différences $\mathrm{K}-h$, $\mathrm{K}-h'$ depuis la valeur négative $-\mathrm{K}$ jusqu'à la valeur positive K, et

(68) $$\sum_{l=0}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=0}^{l'=\mathrm{K}} e^{h(\mathrm{I}-\mathrm{I}_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(\mathrm{I}'-\mathrm{I}'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\mathrm{I}_0+\frac{l\pi}{\mathrm{K}+1}, \mathrm{I}'_0+\frac{l'\pi}{\mathrm{K}+1}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=0}^{l'=\mathrm{K}} e^{(h\mathrm{I}+h\mathrm{I}')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\frac{l\pi}{\mathrm{K}+1}, \frac{l'\pi}{\mathrm{K}+1}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=0}^{l'=\mathrm{K}} e^{-\frac{hl+h'l'}{\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\mathrm{I}+\frac{l\pi}{\mathrm{K}+1}, \mathrm{I}'+\frac{l'\pi}{\mathrm{K}+1}\right).$$

A l'aide des formules (66) et suivantes, on déterminera une valeur de l'intégrale

$$\int \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathrm{I}')\, \partial t,$$

les valeurs de I, I' étant

(69) $$\mathrm{I} = \alpha t + c, \qquad \mathrm{I}' = \alpha' t + c'.$$

Si, pour fixer les idées, on applique à cette détermination la formule (62), on trouvera

(70) $$\int \mathcal{F}(\mathrm{I},\mathrm{I}')\, \partial t = \text{Constante} + \frac{1}{(2\mathrm{K}+1)^2} \sum_{l=-\mathrm{K}}^{l=\mathrm{K}} \sum_{l'=-\mathrm{K}}^{l'=\mathrm{K}} \sum_{h=-\mathrm{K}}^{h=\mathrm{K}} \sum_{h'=-\mathrm{K}}^{h'=\mathrm{K}} \frac{e^{(h\mathrm{I}+h'\mathrm{I}')\sqrt{-1}}}{(h\alpha+h'\alpha')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2\mathrm{K}+1}\pi\sqrt{-1}}\, \mathcal{F}\left(\frac{l\pi}{2\mathrm{K}+1}, \frac{l'\pi}{2\mathrm{K}+1}\right),$$

et, comme cette dernière formule subsiste, tandis que h et h' changent de

Signe, on en conclut a

(71) $$\int f(\Xi,\Xi')\,\partial t = \text{constante}$$
$$+\frac{1}{(2K+1)^2}\sum_{l=-K}^{l=K}\sum_{l'=-K}^{l'=K}\sum_{h=-K}^{h=K}\sum_{h'=-K}^{h'=K}\frac{\sin\left(h\Xi+h'\Xi'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)}{ha+h'a'}\,f\left(\frac{2l\pi}{2K+1},\frac{2l'\pi}{2K+1}\right).$$

On aura par suite

(72) $$\int_0^t f(\Xi,\Xi')\,\partial t =$$
$$\frac{1}{(2K+1)^2}\sum_{l=-K}^{l=K}\sum_{l'=-K}^{l'=K}\sum_{h=-K}^{h=K}\sum_{h'=-K}^{h'=K}\frac{\sin\left(h\Xi+h'\Xi'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)-\sin\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)}{ha+h'a'}\,f\left(\frac{2l\pi}{2K+1},\frac{2l'\pi}{2K+1}\right),$$

ou a qui devient en mettant,

(73) $$\int_0^t f(\Xi,\Xi')\,\partial t =$$
$$\frac{1}{(2K+1)^2}\sum_{l=-K}^{l=K}\sum_{l'=-K}^{l'=K}\sum_{h=-K}^{h=K}\sum_{h'=-K}^{h'=K}\frac{\sin\left(\frac{ha+h'a'}{2}t\right)\cos\left(\frac{ha+h'a'}{2}t+hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)}{\frac{1}{2}(ha+h'a')}\,f\left(\frac{2l\pi}{2K+1},\frac{2l'\pi}{2K+1}\right).$$

Il est bon d'observer que, pour les valeurs de h et de h' qui vérifient la condition

(74) $$ha+h'a'=0$$

l'expression

$$\frac{\sin\left(h\Xi+h'\Xi'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)-\sin\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)}{ha+h'a'}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{ha+h'a'}{2}t\right)\cos\left(\frac{ha+h'a'}{2}t+hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right)}{\frac{1}{2}(ha+h'a')}$$

se réduit à

$$t\cos\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2K+1}2\pi\right).$$

Cette fraction ne devient donc simplement $=t$, quand on posera simultanément

$h \geq 0, h' \geq 0$.

A l'aide du théorème précédemment établi, on pourra facilement développer l'expression

$$\cos^K \Delta_{I, I'}$$

suivant les sinus et cosinus des multiples de I et de I', ou, ce qui revient au même, suivant les puissances des exponentielles

$$e^{\pm I\sqrt{-1}}, \quad e^{\pm I'\sqrt{-1}},$$

$\cos \Delta_{I, I'}$ étant ce que devient le second membre de l'équation (17) du § précédent, quand on y remplace p, θ par I et p', θ' par I'. En effet, dans cette hypothèse, le produit

$$e^{I\sqrt{-1}} \cos \Delta_{I, I'}$$

sera une fonction linéaire de l'exponentielle $e^{\pm I\sqrt{-1}}$. Par conséquent le produit

$$e^{KI\sqrt{-1}} \cos^K \Delta_{I, I'},$$

considéré comme fonction de cette exponentielle, sera du degré K; d'où il est aisé de conclure que le développement de

$$\cos^K \Delta_{I, I'}$$

renfermera seulement les sinus et cosinus des arcs

$$KI, \ (K-2)I, \ (K-4)I, \ \ldots.$$

On prouvera de même que le développement en question renferme seulement les sinus et cosinus des arcs

$$KI', \ (K-2)I', \ (K-4)I', \ \ldots.$$

On pourra donc poser, dans la formule (66),

$$f(I, I') = \cos^K \Delta_{I, I'},$$

et l'on en tirera immédiatement

$$(74) \quad \cos^K \Delta_{I, I'} = \left(\frac{1}{K+1}\right)^2 S e^{(hI + h'I')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl + h'l'}{K+1}\pi\sqrt{-1}} \cos^K \Delta_{\frac{hK}{K+1}, \frac{h'K}{K+1}},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières de l et de l', depuis

la limite zéro, jusqu'à la limite κ, et à toutes les valeurs entières de h, h', qui rendent positives les différences $\kappa - h$, $\kappa - h'$, depuis la valeur négative $-\kappa$ jusqu'à la valeur positive κ. Il suffira de substituer les valeurs précédemment trouvées de $\cos^{\kappa}\Delta_{\Pi,\Pi'}$ dans l'équation (32), pour que chaque terme du second membre devienne immédiatement intégrable par rapport à t.

Si, dans la formule (76), on remplace Π par $p-\varpi$, Π' par $p'-\varpi'$, on trouvera

$$\cos^{\kappa}\delta = \left(\frac{1}{\kappa+1}\right)^2 \sum e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hk+h'k'}{\kappa+1}\pi\sqrt{-1}} \cos^{\kappa}\Delta_{\frac{k\pi}{\kappa+1},\frac{k'\pi}{\kappa+1}}. \tag{78}$$

La formule (75) coïncide avec la formule (76), comme l'équation (32) avec l'équation (13), dans le cas particulier où l'on a

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' = 0.$$

Si, dans le même cas, on pose

$$\mathcal{K} = \frac{1.3.\ldots.(2\kappa-1)}{2.4.\ldots.2\kappa} 2^{\kappa}(a^2+a'^2)^{-\kappa-\frac{1}{2}} = \left[\tfrac{1}{2}\right]_{\kappa} 2^{\kappa}(a^2+a'^2)^{-\kappa-\frac{1}{2}} \tag{76'}$$

on aura

$$\Theta_{\kappa} = \mathcal{K} a^{\kappa} a'^{\kappa}, \tag{77}$$

et la valeur de $\mathcal{I}$, déterminée par l'équation (32), deviendra

$$\mathcal{I} = \pi^2 \delta \mathcal{K} a^{\kappa} a'^{\kappa} \cos^{\kappa}\Delta_{\Pi,\Pi'}. \tag{74}$$

Pour revenir de la valeur précédente de $\mathcal{I}$ à celle que détermine l'équation (13), il suffira de substituer à $\cos\Delta_{\Pi,\Pi'}$ la quantité $\cos\delta$, avec δ, a, a' les rayons vecteurs

$$r = a - a'\varepsilon'\cos\psi, \qquad r' = a' - a\varepsilon\cos\psi';$$

et par suite à la constante $\mathcal{K}$ ce que devient cette constante, quand on y fait croître a de $-a'\varepsilon'\cos\psi$, et a' de $-a\varepsilon\cos\psi'$, c'est-à-dire la somme

$$\delta(-1)^{f+f'} \frac{(a'\varepsilon'\cos\psi)^{f}}{1.2\ldots f} \frac{(a\varepsilon\cos\psi')^{f'}}{1.2\ldots f'} \frac{\partial^{f+f'}\mathcal{K}}{\partial a^{f}\partial a'^{f'}}, \tag{80}$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières nulles ou positives de μ, μ'. Cela posé, la valeur de Σ fournie par l'équation (79) deviendra

$$(81)\qquad \Sigma = m' S (-1)^{\mu+\mu'} \frac{(a\varepsilon\cos\psi)^{\mu}}{1.2\ldots\mu} \frac{(a'\varepsilon'\cos\psi')^{\mu'}}{1.2\ldots\mu'} \frac{\partial^{\mu+\mu'}\pi^{\kappa}}{\partial a^{\mu}\partial a'^{\mu'}} r^{\kappa} r'^{\kappa} \cos^{\kappa}\Delta,$$

et l'on aura, en vertu de la formule (79),

$$(82)\qquad r^{\kappa} r'^{\kappa} \cos^{\kappa}\Delta = \left(\frac{1}{\kappa+1}\right)^{2} S r^{\kappa} e^{h(\psi-\varpi)\sqrt{-1}} r'^{\kappa} e^{h'(\psi'-\varpi')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hh'\pi\sqrt{-1}}{\kappa+1}} \cos^{\kappa}\Delta \frac{\psi}{\kappa+1}, \frac{\psi'}{\kappa+1},$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières de h et de h', depuis la limite zéro jusqu'à la limite κ, et à toutes les valeurs entières de h, h', qui vérifient pour les différences $\kappa-h$, $\kappa-h'$, depuis la valeur négative $-\kappa$ jusqu'à la valeur positive κ. Comme on aura d'ailleurs

$$(83)\qquad \cos(\psi-\varpi) = \frac{\cos\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}, \qquad \sin(\psi-\varpi) = \frac{\eta\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi},$$

la valeur de η étant

$$(84)\qquad \eta = (1-\varepsilon^{2})^{\frac{1}{2}},$$

on en conclura

$$(85)\qquad \begin{cases} e^{(\psi-\varpi)\sqrt{-1}} = \dfrac{\cos\psi-\varepsilon+\eta\sin\psi.\sqrt{-1}}{1-\varepsilon\cos\psi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\eta)e^{\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}}{1-\varepsilon\cos\psi}, \\ e^{-(\psi-\varpi)\sqrt{-1}} = \dfrac{\cos\psi-\varepsilon-\eta\sin\psi.\sqrt{-1}}{1-\varepsilon\cos\psi} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(1+\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}}{1-\varepsilon\cos\psi}; \end{cases}$$

et par suite on trouvera

$$(86)\qquad \begin{cases} r^{\kappa} e^{h(\psi-\varpi)\sqrt{-1}} = \dfrac{a^{\kappa}}{2^{h}}(1-\varepsilon\cos\psi)^{\kappa-h}\left\{(1+\eta)e^{\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}\right\}^{h}, \\ r^{\kappa} e^{-h(\psi-\varpi)\sqrt{-1}} = \dfrac{a^{\kappa}}{2^{h}}(1-\varepsilon\cos\psi)^{\kappa-h}\left\{(1+\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}\right\}^{h}. \end{cases}$$

Si, pour plus de commodité, l'on pose

$$(87)\qquad i = \frac{h}{\sqrt{h^{2}}},$$

auquel cas i sera $+1$ pour des valeurs positives de h, et -1 pour des

valeurs négatives dans, les équations (86) pourront être remplacées par la seule formule

$$(88)\qquad \gamma^{\kappa} e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} = \frac{a^{\kappa}}{2^{ih}}(1-2\varepsilon\cos\psi)^{\kappa-ih}\left\{(1+\eta)e^{i\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{-i\psi\sqrt{-1}}\right\}^{ih}.$$

On aura, d'autre part

$$\left\{(1+\eta)e^{i\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)e^{i\psi\sqrt{-1}}\right\}^{ih}$$

$$= S(-1)^{ih-g}2^{ih-g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}\varepsilon^{ih-g}(1+\eta)^{g-\lambda}(1-\eta)^{\lambda}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}},$$

et

$$(1-2\cos\psi)^{\kappa-ih} = S(-1)^{\mu}(\kappa-ih)_{\mu}\varepsilon^{\mu}\cos^{\mu}\psi;$$

puis, en ayant égard à la formule

$$(1+\eta)(1-\eta) = \varepsilon^2,$$

on en conclura

$$(90)\qquad \gamma^{\kappa}e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} = a^{\kappa}S\frac{(-1)^{ih-g+\mu}}{2^g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}(\kappa-ih)_{\mu}\varepsilon^{ih-g+\mu+2\lambda}(1+\eta)^{g-2\lambda}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos^{\mu}\psi.$$

On trouvera de même

$$(91)\qquad \gamma'^{\kappa}e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}} = a'^{\kappa}S\frac{(-1)^{ih'-g'+\mu'}}{2^{g'}}(ih')_{\lambda',g'-\lambda'}(\kappa-ih')_{\mu'}\varepsilon'^{ih'-g'+\mu'+2\lambda'}(1+\eta')^{g'-2\lambda'}e^{(g'-2\lambda')i\psi'\sqrt{-1}}\cos^{\mu'}\psi',$$

la valeur de i' étant

$$(92)\qquad i' = \frac{h'}{\sqrt{h^2+2}}.$$

Cela posé, si l'on fait, pour abréger,

$$(93)\qquad \Psi = \frac{a^{\kappa+f}}{\kappa+1}\frac{(-1)^{f+ih-g+\mu}}{2^g(1.2.3\ldots f)}(ih)_{\lambda,g-\lambda}(\kappa-ih)_{\mu}\varepsilon^{f+ih-g+\mu+2\lambda}(1+\eta)^{g-2\lambda}e^{-\frac{hk\psi}{\kappa+1}\sqrt{-1}}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos^{f+\mu}\psi,$$

$$(94)\qquad \Psi' = \frac{a'^{\kappa+f}}{\kappa+1}\frac{(-1)^{f'+ih'-g'+\mu'}}{2^{g'}(1.2.3\ldots f')}(ih')_{\lambda',g'-\lambda'}(\kappa-ih')_{\mu'}\varepsilon'^{f'+ih'-g'+\mu'+2\lambda'}(1+\eta')^{g'-2\lambda'}e^{-\frac{hk\psi}{\kappa+1}\sqrt{-1}}e^{(g'-2\lambda')i\psi\sqrt{-1}}\cos^{f'+\mu'}\psi',$$

on aura, en formulant (81), (82), (90) et (91)

$$P = m' S \Phi \Psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^{\beta+\beta'} K}{\partial \alpha^\beta \partial \lambda^{\beta'}} \cos^\kappa \Delta_{\frac{\ell\pi}{\ell+1}, \frac{\ell'\pi}{\ell'+1}}. \tag{95}$$

Puisque ψ étant racine de l'équation

$$\psi = T + \varepsilon \sin \psi, \tag{96}$$

on aura, suivant la formule de Lagrange,

$$\cos^\nu \psi = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\varepsilon^\nu}{1.2.\dots.\nu} \left\{ \frac{\partial^\nu \cos^\nu T \sin^\nu T}{\partial T^\nu} - \nu \frac{\partial^{\nu-1} \cos^{\nu+1} T \sin^{\nu-1} T}{\partial T^{\nu-1}} \right\};$$

puis, en ayant égard à l'équation

$$\cos^{\beta+\nu} T \sin^\nu T = S (-1)^s \frac{(\beta+\nu)_s (\nu)_s}{2^{\beta+\nu}} \frac{\cos(\beta+\nu-2s) T}{(\nu-s)^\nu},$$

on en conclura

$$e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} \cos^{\beta+\mu} \psi =$$

$$S \frac{\varepsilon^\nu}{1.2.\dots.\nu} \left\{ (-1)^s N (\beta+\mu)_s (\nu)_s - (-1)^{s-1} N (\beta+\mu+1)_{s-1} (\nu-1)_{s-1} \frac{N^{\nu-1}}{2^{\beta+\mu+\nu}} \right\} e^{N\sqrt{-1}},$$

la valeur de N étant

$$N = \beta+\mu+\nu+i(g-2\lambda) - 2j - 2s'. \tag{100}$$

On trouvera de même

$$e^{(g'-2\lambda')i\psi'\sqrt{-1}} \cos^{\beta'+\mu'} \psi' =$$

$$S \frac{\varepsilon'^{\nu'}}{1.2.\dots.\nu'} \left\{ (-1)^{s'} N' (\beta'+\mu')_{s'} (\nu')_{s'} - (-1)^{s'-1} N' (\beta'+\mu'+1)_{s'-1} (\nu'-1)_{s'-1} \frac{N'^{\nu'-1}}{2^{\beta'+\mu'+\nu'}} \right\} e^{N'\sqrt{-1}},$$

la valeur de N' étant

$$N' = \beta'+\mu'+\nu'+i(g'-2\lambda') - 2j' - 2s'.$$

Par suite, la valeur

$$n = \beta+\mu+\nu+\beta'+\mu'+\nu'+i(g+g'-2\lambda-2\lambda') - 2j - 2j' - 2s - 2s',$$

$$\mathcal{N} = \beta+\mu+\nu+\beta'+\mu'+\nu'+i(g+g'-2\lambda-2\lambda') - 2j - 2j' - 2s - 2s'$$

$$\mathcal{N}' = \beta+\mu+\nu+\beta'+\mu'+\nu'+i(g+g'-2\lambda-2\lambda') - 2j - 2j' - 2s - 2s'$$

(107) $$A =$$

$$\frac{a^{k+f}}{1.2\ldots f}\,\mathcal{S}\,\frac{(-1)^{n-\nu}}{2^{f+g+\mu+\nu}}\,(ik)_{\lambda,g-\lambda}\,(K-ik)_{\mu}\,\Sigma\left\{(-1)^{\varepsilon}N^{(f+\mu)}{}_{g}\,(V)_{\varepsilon}-(-1)^{\varepsilon}\nu\,(f+\mu+1)_{g}\,(V-1)_{\varepsilon}\right\}\frac{N^{\nu-1}}{1.2\ldots\ldots\nu},$$

(108) $$A' =$$

$$\frac{a'^{k+f'}}{1.2\ldots f'}\,\mathcal{S}\,\frac{(-1)^{n'-\nu'}}{2^{f'+g'+\mu'+\nu'}}\,(i'k')_{\lambda',g'-\lambda'}\,(K-i'k')_{\mu'}\,\Sigma'\left\{(-1)^{\varepsilon'}N'^{(f'+\mu')}{}_{g'}\,(V')_{\varepsilon'}-(-1)^{\varepsilon'}\nu'\,(f'+\mu'+1)_{g'}\,(V'-1)_{\varepsilon'}\right\}\frac{N'^{\nu'-1}}{1.2\ldots\nu'},$$

entrevoir la formules (gg), (gh) et (gg)

(109) $$\mathcal{P} = m'\,\mathcal{S}\,\frac{A\,A'}{(K+1)^2}\,\frac{\partial^{f+f'}\mathcal{K}}{\partial\alpha^f\partial\alpha'^{f'}}\,\cos^{K}\Delta\,\frac{\beta_{\varepsilon}}{K+1},\frac{\theta_{\varepsilon'}}{K+1}\,e^{\left(N\Pi+N'\Pi'-\frac{kk+k'k'}{K+1}\pi\right)\sqrt{-1}};$$

puis, en doivent que la valeur de $\mathcal{P}$ doit se réduire à une quantité réelle, entrevoir de la formule (109)

(110) $$\mathcal{P} = m'\,\mathcal{S}\,\frac{A\,A'}{(K+1)^2}\,\frac{\partial^{f+f'}\mathcal{K}}{\partial\alpha^f\partial\alpha'^{f'}}\,\cos^{K}\Delta\,\frac{\beta_{\varepsilon}}{K+1},\frac{\theta_{\varepsilon'}}{K+1}\,\cos\left(N\Pi+N'\Pi'-\frac{kk+k'k'}{K+1}\pi\right).$$

Il est avant, dans les équations (107), (108), remplacé les expressions

$$(-1)^{f+ik-g+\mu}\,;\qquad (-1)^{f+ik'-g'+\mu'}$$

par les expressions

$$(-1)^{n-\nu}\,,\qquad (-1)^{n'+\nu'}$$

qui leur sont équivalentes, entrevoir les formules (105), (106). Il suit de-là que le principe établi exposé que, dans les formules (107), (108), (109), (110) le signe $\mathcal{S}$ s'étend à toutes les valeurs entrevoir nulles ou positives de

$$K,\ f,\ f',\ \nu \text{ et } \nu';$$

à toutes les valeurs entières, positives nulles ou négatives de k, k'; qui rendent pairs les différences

$$K-k,\quad K-k';$$

depuis la valeur négative $-K$, jusqu'à la valeur négative $+K$; à toutes les valeurs entrevoir nulles ou positives de

$$l,\ g,\ \lambda,\ \mu$$
$$l',\ g',\ \lambda',\ \mu'$$

qui rendent nulles ou positives les différences

(111) $\qquad K-l,\ ih-g,\ g-\lambda,\ (K-ih)-\mu,$

(112) $\qquad K-l',\ i'h'-g',\ g'-\lambda',\ (K-i'h')-\mu';$

enfin à toutes les valeurs entières nulles ou positives de

$$\rho,\ \sigma,$$
$$\rho',\ \sigma',$$

qui rendent nulles ou positives les différences

(113) $\qquad (t+\mu)-\rho,\quad \nu-\sigma,$

(114) $\qquad (t'+\mu')-\rho',\quad \nu'-\sigma',$

outre les différences

(115) $\qquad (t+\mu+1)-\rho,\quad (\nu-1)-\sigma,$

(116) $\qquad (t'+\mu'+1)-\rho',\quad (\nu'-1)-\sigma'.$

Il est bon d'observer que des formules (100) et (103) on tire

(117) $$\begin{cases} \dfrac{n-ih-N}{2} = \rho+\sigma-\dfrac{1+i}{2}(g-2\lambda), \\ \dfrac{n-ih+N}{2} = t+\mu+\nu-(\rho+\sigma)-\dfrac{1-i}{2}(g-2\lambda). \end{cases}$$

Or, les seconds membres des équations (117) étant entiers, les premiers membres devront l'être aussi, ce qui exige que

$$n \pm N - ih$$

et par suite

$$n \pm N - K$$

soit un nombre pair, ou, ce qui revient au même, que

$$n \pm N$$

soit pair ou impair avec le nombre K. D'autre part, $\rho+\sigma$ étant toujours compris entre les limites

$$0,\ t+\mu+\nu,$$

λ entre les limites 0, g, et par suite

$$\frac{1 \pm i}{2}(g - 2\lambda)$$

entre les limites $-g$, $+g$, attendu que l'on a

$$\frac{1 \pm i}{2} = 0 \text{ ou } 1,$$

il est clair que le second membre de chacune des équations (117) deviendra nul ou positif, si l'on ajoute à ce second membre la quantité g. On aura en conséquence

$$\frac{n - ih \pm N}{2} + g = \text{ou} > 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$n + 2g - ih \pm N = \text{ou} > 0;$$

et comme on aura d'ailleurs,

$$ih = \text{ou} > g,$$

on trouvera encore

$$n + g \pm N = \text{ou} > 0, \tag{118}$$

d'où l'on déduit le double signe placé devant la lettre N au signe + ou au signe −. Donc la valeur numérique de N est tout au plus égale à $n+g$, et, par suite, à $n+ih$ et à $n+K$; en sorte qu'on a généralement

$$n + ih = \text{ou} > \sqrt{N^2}, \tag{119}$$

et

$$n + K = \text{ou} > \sqrt{N^2}. \tag{120}$$

Donc, si le module K ne dépasse pas une limite donnée, la valeur numérique de N ne pourra croître indéfiniment qu'autant que n lui-même croîtra indéfiniment. D'ailleurs l'excentricité ε étant considérée comme une quantité très petite du premier ordre, la valeur de ε fournie par l'équation (105) sera du l'ordre N. Donc l'ordre de ε ne surpassera toujours $\sqrt{N^2} - K$; et la valeur numérique de A deviendra très petite pour de grandes valeurs numériques de N.

Il est très facile de trouver dans I les termes correspon-

- Quant à des valeurs de

$$N,\ n\ ;\ N',\ n'$$

qui vérifient les conditions

$$n+g=\pm N\ ;\qquad n'+g'=\pm N'. \tag{121}$$

Enfin, entre les formules (117)

$$\begin{cases} \dfrac{n+g-N}{2}=\dfrac{g+ih-(1+i)(g-2\lambda)}{2}+\beta+\delta, \\ \dfrac{n+g+N}{2}=\dfrac{g+ih-(1-i)(g-2\lambda)}{2}+\alpha+\mu+\nu-(\beta+\delta). \end{cases} \tag{122}$$

On voit comme, dans les seconds membres des formules (122), les quantités

$$\frac{g+ih-(1+i)(g-2\lambda)}{2},\qquad \beta+\delta,$$

$$\frac{g+ih-(1-i)(g-2\lambda)}{2},\qquad \alpha+\mu+\nu-(\beta+\delta)$$

ne peuvent être que positives ou nulles, on aura évidemment $i=1$, si $N=n+g$,

$$g+ih=(1+i)(g-2\lambda),\qquad \beta+\delta=0,$$

et par suite

$$\lambda=0,\quad i=1,\quad g=ih=h,\quad \beta=0,\quad \delta=0\ ;$$

2° si $N=-(n+g)$

$$g+ih=(1-i)(g-2\lambda),\qquad \alpha+\mu+\nu=\beta+\delta,$$

et par suite

$$\lambda=0,\quad i=-1,\quad g=ih=-h,\quad \text{et } \beta=\alpha+\mu,\ \delta=\nu,$$
$$\text{ou } \beta=\alpha+\mu+1,\ \delta=\nu-1.$$

Cela posé, les formules (103), (105) donneront

$$n=\alpha+\mu+\nu, \tag{123}$$

$$E=\varepsilon^{n}(1+\eta)^{ih}, \tag{124}$$

et l'on tirera de la formule (107), 1° en supposant $N=n+g=n+ih$,

$$A=\frac{a^{\alpha+\beta}}{1\cdot 2\cdots\beta}\int\frac{(-1)^{n-\nu}}{\varepsilon^{n+ih}}(n-ih)_{\mu}\,E\,(N-\nu)\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}\ ; \tag{125}$$

2° en supposant $N = -(n+g) = -(n+ik)$,

$$A = \frac{a^{\lambda+\mu}}{1\cdot 2\cdots\mu} \sum \frac{(-1)^n}{2^{n+ik}} (\lambda-ik)_\mu (N+\nu) \frac{-N^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}. \tag{126}$$

Les formules (125) et (126) sont toutes deux comprises dans la suivante

$$A = \frac{a^{\lambda+\mu}}{1\cdot 2\cdots\mu} \sum \frac{(-1)^{n-\nu}}{2^{n+ik}} (\lambda-ik)_\mu \Sigma (n-\nu+ik) \frac{(n+ik)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}. \tag{127}$$

On trouvera de même, en supposant $N' = \pm(n'+g') = \pm(n'+i'k')$,

$$n' = f'+\mu'+\nu', \tag{128}$$

$$\Sigma' = \varepsilon'^{n'}(1+\eta')^{ik'}, \tag{129}$$

et

$$A' = \frac{a'^{\lambda+\mu'}}{1\cdot 2\cdots\mu'} \sum \frac{(-1)^{n'-\nu'}}{2^{n'+ik'}} (\lambda-ik')_{\mu'} \Sigma'(n'-\nu'+ik') \frac{(n'+ik')^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}. \tag{130}$$

Il est encore facile de développer suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon'$ les valeurs de Σ, Σ' fournies par les équations (129), (106). En effet, si l'on pose

$$\rho = 1+\eta, \tag{131}$$

on aura

$$(\rho-1)^2 = \eta^2 = 1-\varepsilon^2,$$

$$\rho^2 - 2\rho = -\varepsilon^2,$$

et par suite

$$\rho = 2 - \frac{\varepsilon^2}{\rho}. \tag{132}$$

Cela posé, la formule de Lagrange donnera

$$\Sigma(\rho) = \Sigma(2) + \sum_{\nu=1}^{\nu=\infty} \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{1\cdot 2\cdots\nu} \frac{\partial^{\nu-1}\{\rho^{-\nu}\Sigma'(\rho)\}}{\partial\rho^{\nu-1}}, \tag{133}$$

et par conséquent

$$\rho^\lambda = (1+\eta)^\lambda = 2^\lambda + \sum \frac{(-1)^\nu \varepsilon^{2\nu}}{1\cdot 2\cdots\nu} \lambda \frac{\partial^{\nu-1}(\rho^{\lambda-\nu-1})}{\partial\rho^{\nu-1}}, \tag{134}$$

la valeur de ρ devant être réduite à 2 après les différentiations ef-

-fractions. On aura donc

$$(1+\eta)^{\lambda} = 2^{\lambda} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\omega} \frac{\lambda}{\lambda-2\nu} (2\nu-\lambda)_{\nu} \, 2^{2\nu} \, \eta^{\lambda-2\nu},$$

ou, ce qui revient au même

$$(1+\eta)^{\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\nu=\omega} \frac{\lambda}{\lambda-2\nu} (2\nu-\lambda)_{\nu} \, 2^{\lambda} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2\nu}; \tag{135}$$

et par suite

$$(1+\eta)^{g-2\lambda} = 2^{g-2\lambda} \sum_{\nu=0}^{\nu=\omega} \frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2\nu} (2\lambda-g+2\nu)_{\nu} \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2\nu}, \tag{136}$$

$$\mathfrak{L} = \sum \frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2\nu} (2\lambda-g+2\nu)_{\nu} \frac{\zeta^{n+2\nu}}{2^{2\lambda-g+2\nu}}. \tag{137}$$

On trouvera de même

$$\mathfrak{L}' = \sum \frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2\nu'} (2\lambda'-g'+2\nu')_{\nu'} \frac{\zeta'^{n'+2\nu'}}{2^{2\lambda'-g'+2\nu'}}. \tag{138}$$

Si l'on remplace maintenant n par $n-2\nu$ et n' par $n'-2\nu'$, alors celles des équations (103), (104), (137), (138), on obtiendra les suivantes

$$n = f+ih-g+\mu+\nu+2\lambda+2\nu, \tag{139}$$

$$n' = f'+ih'-g'+\mu'+\nu'+2\lambda'+2\nu', \tag{140}$$

$$\mathfrak{L} = \sum \frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2\nu} (2\lambda-g+2\nu)_{\nu} \frac{\zeta^{n}}{2^{2\lambda-g+2\nu}}, \tag{141}$$

$$\mathfrak{L}' = \sum \frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2\nu'} (2\lambda'-g'+2\nu')_{\nu'} \frac{\zeta'^{n'}}{2^{2\lambda'-g'+2\nu'}}; \tag{142}$$

et les valeurs de Σ pourra être déterminé à l'aide de ces dernières formules jointes aux équations (100), (102), (107), (108), (110). Alors enfin, supposant

$$N = \pm(n+g), \qquad N' = \pm(n'+g'),$$

on aura naturellement $\nu=0$, $\nu'=0$, et l'on retrouvera les valeurs de A, A' fournies par les équations (127), (130).

Observons enfin qu'on peut aisément calculer la valeur de

$$\frac{\partial^{g+g'} \mathfrak{L}}{\partial a^{g} \partial a'^{g'}},$$

en présentant la quantité K sous la forme

$$K = 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K (a'+a\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}} (a'-a\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}}, \tag{1bd}$$

ou

$$K = 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K (a+a'\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}} (a-a'\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}}. \tag{1bk}$$

En effet, $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ désignant deux fonctions quelconques de a, a', on a généralement

$$\frac{\partial^{f+f'}\mathcal{A}\mathcal{A}'}{\partial a^f \partial a'^{f'}} = S(f)_n (f')_{n'} \frac{\partial^{f-n+n'}\mathcal{A}}{\partial a^{f-n} \partial a'^{n'}} \frac{\partial^{f'-n'+n}\mathcal{A}'}{\partial a^{f'-n'} \partial a'^{n}}, \tag{1bs}$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs entières de n comprises entre les limites 0, f et à toutes les valeurs entières de n' comprises entre les limites 0, n'. Donc, en posant

$$K = 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \mathcal{A}\mathcal{A}', \quad \mathcal{A} = (a'+a\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{A}' = (a'-a\sqrt{-1})^{-K-\frac{1}{2}},$$

et

$$\xi = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{a'}, \qquad \xi' = \frac{\pi}{2} - \xi = \operatorname{arc\,tang}\frac{a'}{a},$$

on trouvera

$$\frac{\partial^{f+f'} K}{\partial a^f \partial a'^{f'}} =$$

$$\frac{(-1)^{f+f'}(\sqrt{-1})^f}{2^{f+f'-K}} \left[\tfrac{1}{2}\right]_K S(-1)^n (f)_n (f')_{n'} \frac{(2K+1)(2K+3)\cdots(2K+2f-2n+2n'-1)}{(a'+a\sqrt{-1})^{K+f-n+n'+\frac{1}{2}}} \frac{(2K+1)(2K+3)\cdots(2K+2f'-2n'+2n+1)}{(a'-a\sqrt{-1})^{K+f'-n'+n+\frac{1}{2}}},$$

ou, ce qui revient au même

$$\frac{\partial^{f+f'} K}{\partial a^f \partial a'^{f'}} =$$

$$\frac{(-1)^{f+f'}}{2^{f+f'-K}} \left[\tfrac{1}{2}\right]_K S(f)_n (f')_{n'} \frac{(2K+1)(2K+3)\cdots(2K+2f-2n+2n'-1)(2K+1)(2K+3)\cdots(2K+2f'-2n'+2n-1)}{(a'+a\sqrt{-1})^{K+\frac{f+f'+1}{2}}} \cos\left\{(2n-f)\xi + (2n'-f')\xi'\right\}$$

Lorsque $\frac{a}{a'}$ est inférieur à l'unité, on peut facilement développer $\mathcal{A}$ suivant les puissances ascendantes de $\frac{a}{a'}$.

en opérant comme il suit

Faisons

(149) $$\frac{a}{a'} = \theta .$$

On aura

(150) $$\Theta_k = \frac{2^k}{a'}\left[\tfrac{1}{2}\right]_k \theta^k (1+\theta^2)^{-k-\frac{1}{2}} = \frac{2^k}{a'}\left[\tfrac{1}{2}\right]_k S(-1)^t \left[k+\tfrac{1}{2}\right]_t \theta^{k+2t},$$

et par suite l'équation (32) donnera

(151) $$P = \frac{m'}{a'} S(-1)^t 2^k \left[\tfrac{1}{2}\right]_k \left[k+\tfrac{1}{2}\right]_t \theta^{k+2t} \cos^k \Delta_{I,I'}.$$

Pour déduire de l'équation (151) la valeur de P que détermine l'équation (13), il suffira de remplacer $\cos\Delta_{I,I'}$ par $\cos\psi$, a' par $a'(1-\varepsilon'\cos\psi')$, et

$$\frac{a}{a'} = \theta$$

par

$$\frac{r}{r'} = \frac{a}{a'}\,\frac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'} = \theta\,\frac{1-\varepsilon\cos\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi'}.$$

On aura donc généralement

(152) $$P = \frac{m'}{a'} S(-1)^t 2^k \left[\tfrac{1}{2}\right]_k \theta^{k+2t} \frac{(1-\varepsilon\cos\psi)^{k+2t}}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{k+2t+1}} \cos^k\psi .$$

D'ailleurs on tire de la formule (90), en posant $k = ih$ et par suite $\mu = 0$,

(153) $$(1-\varepsilon\cos\psi)^{ih}\, e^{h(\eta-\varepsilon)\sqrt{-1}} = S\frac{(-1)^{ih-g}}{2^g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}\, \varepsilon^{ih-g+2\lambda}(1+\eta)^{g-2\lambda}\, e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}.$$

On trouvera de même

(154) $$(1-\varepsilon'\cos\psi')^{ih'} e^{h'(\eta'-\varepsilon')\sqrt{-1}} = S\frac{(-1)^{ih'-g'}}{2^{g'}}(ih')_{\lambda',g'-\lambda'}\, \varepsilon'^{ih'-g'+2\lambda'}(1+\eta')^{g'-2\lambda'} e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}}$$

Or, en vertu de ces dernières formules réunies à l'équation (78) et à la suivante

$$(-1)^{ih+ih'} = (-1)^{ak} = 1,$$

la formule (152) donnera

$$\Sigma = \tag{157}$$

$$\frac{m'}{a^l} S \frac{(-1)^{\frac{f+g+g'}{2}}}{2^{g+g'}} \frac{z^\kappa}{(\kappa+1)^2} \left[\tfrac{1}{2}\right]_\kappa \left[\kappa+\tfrac{1}{2}\right]_f^{-1} (ih)_{\lambda,g-2\lambda} (ih')_{\lambda',g-2\lambda'} \mathcal{Q} e^{-\frac{hk+h'k'}{\kappa+1}\pi\sqrt{-1}} \cos^\kappa \Delta \, P_{\frac{k\pi}{\kappa+1}, \frac{l'\pi}{\kappa+1}},$$

la valeur de $\mathcal{Q}$ étant

$$\mathcal{Q} = \tag{158}$$

$$\rho^{\kappa+2f} e^{ih-g+2\lambda} (1+\eta)^{g-2\lambda} e^{ih'-g'+2\lambda'} (1+\eta')^{g'+2\lambda'} \frac{(1-\varepsilon\cos\psi)^{\kappa+2f-ih}}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{\kappa+2f+ih'+1}} e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} e^{(g'+2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}} a.$$

Si maintenant on combine les équations (155), (156) avec l'équation (136) et avec les formules

$$(1-\varepsilon\cos\psi)^{\kappa+2f-ih} = S(-1)^\mu (\kappa+2f-ih)_\mu \varepsilon^\mu \cos^\mu\psi, \tag{157}$$

$$(1-\varepsilon'\cos\psi')^{-(\kappa+2f+ih'+1)} = S[\kappa+2f+ih'+1]_{\mu'} \varepsilon'^{\mu'} \cos^{\mu'}\psi', \tag{158}$$

$$e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} \cos^\mu\psi = S \frac{\varepsilon^\nu}{1\cdot 2\cdots\nu} \left\{(-1)^\varsigma N^\nu(\mu)_\rho (\nu)_\varsigma - (-1)^\varsigma N^\nu(\mu+1)_\rho (\nu-1)_\varsigma\right\} \frac{N^{\nu-1}}{2^{\mu+\nu}} e^{N\Pi\sqrt{-1}}, \tag{159}$$

$$N = \mu+\nu+i(g-2\lambda)-2\rho-2\varsigma, \tag{160}$$

$$e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}} \cos^{\mu'}\psi' = S \frac{\varepsilon'^{\nu'}}{1\cdot 2\cdots\nu'} \left\{(-1)^{\varsigma'} N'^{\nu'}(\mu')_{\rho'} (\nu')_{\varsigma'} - (-1)^{\varsigma'} N'^{\nu'}(\mu'+1)_{\rho'} (\nu'-1)_{\varsigma'}\right\} \frac{N'^{\nu'-1}}{2^{\mu'+\nu'}} e^{N'\Pi'\sqrt{-1}} \tag{161}$$

$$N' = \mu'+\nu'+i'(g'-2\lambda')-2\rho'-2\varsigma', \tag{162}$$

dont les quatre dernières sont ce que deviennent les formules (99), (100), (101) et (102), quand on y remplace f et f' par zéro, on trouvera définitivement

$$\Sigma = \frac{m'}{a^l} S(-1)^{\frac{f+g+g'}{2}} \frac{z^\kappa}{(\kappa+1)^2} \left[\tfrac{1}{2}\right]_\kappa \left[\kappa+\tfrac{1}{2}\right]_f^{-1} A A' \beta^{\kappa+2f} \varepsilon^\kappa \varepsilon'^{\kappa'} \cos^\kappa \Delta \, P_{\frac{k\pi}{\kappa+1}, \frac{l'\pi}{\kappa+1}} \cos\left(N\Pi + N'\Pi' - \frac{hk+h'k'}{\kappa+1}\pi\right), \tag{163}$$

les valeurs de κ, κ', A et A' étant

$$\kappa = ih-g+\mu+\nu+2\lambda+2\upsilon, \tag{164}$$

$$\kappa' = ih'-g'+\mu'+\nu'+2\lambda'+2\upsilon', \tag{165}$$

(166) $A =$

$$S\frac{(-1)^{g+\mu}}{2^{\mu+g-ik}}\frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2\nu}(2\lambda-g+2\nu)_\nu\,(ik)_{\lambda+g-\lambda}\,(\kappa+2f-ik)_\mu\left\{(-1)^\beta N^{(\mu)}p_\beta^{(\nu)}-(-1)^\beta N^{(\mu+1)}p_\beta^{(\nu-1)}\right\}\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot2\cdots\nu},$$

(167) $A' =$

$$S\frac{(-1)^{g'}}{2^{\mu+g'-ik'}}\frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2\nu'}(2\lambda'-g'+2\nu')_\nu\,(ik')_{\lambda'+g'-\lambda'}\,[\kappa+2f+ik'+1]_\mu\left\{(-1)^\beta N'^{(\mu)}p'^{(\nu')}_\beta-(-1)^\beta N'^{(\mu+1)}p'^{(\nu'-1)}_\beta\right\}\frac{N'^{\nu'-1}}{1\cdot2\cdots\nu'}.$$

Il est bon d'observer que l'entier des formules (160), (161)

(168)
$$\begin{cases}\dfrac{n+g-N}{2}=\dfrac{ik+g-(1+i)(g-2\lambda)}{2}+\mu+\beta+\nu,\\[2ex]\dfrac{n+g+N}{2}=\dfrac{ik+g-(1-i)(g-2\lambda)}{2}+\mu+\nu-(\mu+\beta)+\nu,\end{cases}$$

et

(169)
$$\begin{cases}\dfrac{n+ik-N}{2}=ik-\dfrac{1+i}{2}(g-2\lambda)+\mu+\beta+\nu,\\[2ex]\dfrac{n+ik+N}{2}=ik-\dfrac{1-i}{2}(g-2\lambda)+\mu+\nu-(\mu+\beta)+\nu.\end{cases}$$

Or, les seconds membres des formules (168), (169) étant nécessairement pairs, les premiers devront l'être aussi. Donc la valeur numérique de N ne pourra surpasser le nombre $n+g$, a fortiori le nombre $n+ik=n+\sqrt{hk}$, et le nombre $n+k$. De même la valeur numérique de N' ne pourra surpasser le nombre $n'+k$. Par conséquent, dans chacun des termes dont se compose le développement de Ω, les valeurs numériques de N et de N' seront l'une et l'autre inférieures au nombre

$$n+n'+k+2f,$$

c'est-à-dire à la somme des exposants des trois quantités

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta;$$

et, si l'on considère seulement les termes où cette somme ne dépasse pas une limite donnée, les valeurs de N, N' correspondantes à ces mêmes termes seront en nombre fini.

Observons encore que les seconds membres des formules (169) étant des quantités entières, $n+ik\pm N$ devra être divisible par 2.

Donc $n \pm \sqrt{N^2}$ devra être pair ou impair, suivant que le nombre $\sqrt{k^2}$, ou, ce qui revient au même suivant que le nombre K sera pair ou impair.

Comme on a généralement

$$(170)\quad \cos\left(N\Pi + N'\Pi' - \frac{hl+h'l'}{K+1}\pi\right) = \cos(N\Pi + N'\Pi')\cos\left(\frac{hl+h'l'}{K+1}\pi\right) + \sin(N\Pi + N'\Pi')\sin\left(\frac{hl+h'l'}{K+1}\pi\right),$$

il est clair que les formules (110) et (165) fourniront le moyen de développer, suivant les sinus et cosinus des arcs de la forme $N\Pi + N'\Pi'$, la valeur de $\mathcal{P}$ déterminée par l'équation (13). Si l'on voulait développer de la même manière les valeurs de $\mathcal{I}$ que fournissent les équations (14) et (15), il faudrait à l'équation (79) substituer les suivantes

$$(171)\quad \frac{1}{(2K+1)^2}\sum e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}\pi\sqrt{-1}} \left(1+\cos\Delta\frac{el\varepsilon}{2K+1}, \frac{el'\varepsilon}{2K+1}\right)^K =$$
$$(1+\cos\Delta)^K,$$

$$(172)\quad \frac{1}{(2K+1)^2}\sum e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{2K+1}\pi\sqrt{-1}} \left(1-\cos\Delta\frac{el\varepsilon}{2K+1}, \frac{el'\varepsilon}{2K+1}\right)^K =$$
$$(1-\cos\Delta)^K,$$

que l'on déduit immédiatement de la formule (62), en y remplaçant $\varphi(\Pi, \Pi')$ par l'expression $(1+\cos\Delta)^K$ ou $(1-\cos\Delta)^K$ considérée comme une fonction des sinus et cosinus des arcs $p-\varpi$, $p'-\varpi'$. Dans les formules (171), (172), comme dans la formule (62), le signe $\sum$ s'étend à toutes les valeurs positives nulles ou négatives de l, l', h, h', depuis la valeur négative $-K$, jusqu'à la valeur positive K. D'ailleurs on trouvera dans formules (14) et (15), 1° en supposant $\varepsilon = 0$, $\varepsilon' = 0$,

$$(173)\quad \mathcal{I} = \frac{m'}{a'}\mathcal{P}(-1)^{\frac{f}{2}} 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f \theta^{K+\frac{f}{2}} (1+\cos\Delta_{\Pi,\Pi'})^K,$$

$$(174)\quad \mathcal{I} = \frac{m'}{a'}\mathcal{P}(-1)^{\frac{f}{2}} 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f \theta^{K+\frac{f}{2}} (1-\cos\Delta_{\Pi,\Pi'})^K;$$

2°, dans le cas contraire,

(175) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S (-1)^{\frac{k}{2}} 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f \beta^{K+\frac{k}{2}} \frac{(1-\varepsilon\cos\psi)^{K+\frac{k}{2}}}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{K+\frac{k}{2}+1}} (1+\cos\Delta)^K,$$

(176) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S (-1)^K 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f \beta^{K+\frac{k}{2}} \frac{(1-\varepsilon\cos\psi)^{K+\frac{k}{2}}}{(1-\varepsilon'\cos\psi')^{K+\frac{k}{2}+1}} (1-\cos\Delta)^K.$$

Donc les valeurs de $\mathcal{P}$, déduites des formules (174) et (175), seront

(177) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{(2K+1)^2} 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f A A' \beta^{K+\frac{k}{2}} \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \varepsilon'^{\frac{k}{2}+l'} \left(1+\cos\Delta \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2K+1}, \frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}{2K+1}\right)^K \cos\left(M\Pi + M'\Pi' - \frac{ll+hh'}{2K+1}\pi\right),$$

et

(178) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S \frac{(-1)^K}{(2K+1)^2} 2^K \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f A A' \beta^{K+\frac{k}{2}} \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \varepsilon'^{\frac{k}{2}+l'} \left(1-\cos\Delta \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{2K+1}, \frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}{2K+1}\right)^K \cos\left(M\Pi + M'\Pi' - \frac{ll+hh'}{2K+1}\pi\right),$$

les valeurs de A, A' étant déterminées à l'aide de formule—

(179) $$A = S \frac{(-1)^{g+\frac{k}{2}}}{2^{2\lambda+g-i\lambda}} \frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2v} (2\lambda-g+2v)_v \, (ik)_{\lambda,g-\lambda} \, (K+\tfrac{k}{2}-ik)_\mu \left\{(-1)^{\frac{k}{2}} N_{i,\frac{k}{2}+l} \, \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \, \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \, N_{i,\frac{k}{2}+l} \, (\lambda^{(\mu)})_{\frac{k}{2}}\right\} \frac{\lambda^{\nu-i}}{1\cdot 2\cdots\nu},$$

(180) $$A' = S \frac{(-1)^{g'}}{2^{2\lambda'+g'-i\lambda'}} \frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2v'} (2\lambda'-g'+2v')_{v'} \, (ik')_{\lambda',g'-\lambda'} \, (K+\tfrac{k}{2}-ik')_{\mu'} \left\{(-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon'^{\frac{k}{2}} N_{i',\frac{k}{2}+l'} \, (\lambda'^{(\nu')})_{\frac{k}{2}} - (-1)^{\frac{k}{2}} \varepsilon'^{\frac{k}{2}} N_{i',\frac{k}{2}+l'} \, (\lambda'^{(\nu'+1)})_{\frac{k}{2}}\right\} \frac{\lambda'^{\nu'-i'}}{1\cdot 2\cdots\nu'},$$

jointes aux formules (160), (162), (163), (165). Enfin si à l'équation (162) on substituait l'équation analogue qui peut se déduire de la formule (148), alors au lieu des formules (177), (178), on trouverait

(181) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S \frac{(-1)^{\frac{k}{2}}}{(K+1)^2} 2^{K-2} \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f A A' \beta^{K+\frac{k}{2}} \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \varepsilon'^{\frac{k}{2}+l'} \left(1+\cos\Delta \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{K+1}, \frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}{K+1}\right)^K \cos\left(M\Pi + M'\Pi' - \frac{ll+hh'}{K+1}\pi\right),$$

et

(182) $$\mathcal{P} = \frac{m'}{a'} S \frac{(-1)^K}{(K+1)^2} 2^{K-2} \left[\tfrac{1}{2}\right]_K \left[2K+1\right]_f A A' \beta^{K+\frac{k}{2}} \varepsilon^{\frac{k}{2}+l} \varepsilon'^{\frac{k}{2}+l'} \left(1-\cos\Delta \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{K+1}, \frac{\sqrt{1-\varepsilon'^2}}{K+1}\right)^K \cos\left(M\Pi + M'\Pi' - \frac{ll+hh'}{K+1}\pi\right),$$

le signe S s'étendant à toutes les valeurs de l, l' comprises entre les limites $-K$, $K+1$, et à toutes les valeurs de h, h' comprises entre les limites $-K$, $+K$.

---

§ 6. Sur les restes des séries convergentes qui représentent les divers développements de R.

Quand, à l'aide des formules établies dans les paragraphes précédents, on a développé la fonction R en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes des quantités $\varepsilon, \varepsilon', \theta$, etc., ou bien encore des quantités $\varepsilon, \varepsilon', \delta$, etc., il est facile de trouver une limite supérieure aux erreurs que l'on commet lorsque, dans ces mêmes séries, on conserve seulement les termes où les puissances des quantités dont il s'agit offrent des exposants respectivement inférieurs à des nombres donnés.

Concevons, pour fixer les idées, φ' à l'aide de la formule (70) ou (90) du second paragraphe on ait développé suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon'$, la partie $\mathcal{P}$ de R que détermine l'équation

$$\mathcal{P} = \frac{m' r r' \cos V}{\rho'^3}, \tag{1}$$

et que l'on cherche une limite de l'erreur commise, quand on néglige dans le développement ainsi obtenu tous les termes où les puissances des excentricités $\varepsilon, \varepsilon'$ offrent des exposants respectivement égaux ou supérieurs aux deux nombres

$$n, n'.$$

Exprimons cette série $\mathcal{P}$ comme une fonction de $\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi'$ et posons en conséquence

$$\mathcal{P} = \mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi'), \tag{2}$$

ψ, ψ' étant des fonctions implicites de $\varepsilon, \varepsilon'$, déterminées par les équations

$$\psi = \Pi + \varepsilon \sin \psi, \tag{3}$$

$$\psi' = \Pi' + \varepsilon' \sin \psi'. \tag{4}$$

Désignons maintenant, par

$$\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\psi}, \bar{\psi}',$$

Les expressions imaginaires dont les modules étaient respectivement désignés par

$$\Xi, \Xi', \Psi, \Psi'$$

entraînent qu'on ait

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \Xi(\cos p + \sqrt{-1}\sin p), & \xi' = \Xi'(\cos p' + \sqrt{-1}\sin p'), \\ \psi = \Psi(\cos q + \sqrt{-1}\sin q), & \psi' = \Psi'(\cos q' + \sqrt{-1}\sin q'), \end{cases}$$

p, p', q, q' représentant des arcs réels. Cela donne, en formules (183) ou (184) et (6) du second paragraphe [1ère partie]

$$(6)\qquad \mathcal{F}(\xi, \xi', \psi, \psi') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar\psi\bar\psi' \frac{1 - \xi\cos(\Pi+\bar\psi)}{\bar\psi - \xi\sin(\Pi+\bar\psi)} \frac{1 - \xi'\cos(\Pi'+\bar\psi')}{\bar\psi' - \xi'\sin(\Pi'+\bar\psi')} \mathcal{F}(\xi, \xi', \Pi+\bar\psi, \Pi'+\bar\psi')\, dq\, dq',$$

puis

$$(7)\qquad \mathcal{F}(\xi, \xi', \Pi+\bar\psi, \Pi'+\bar\psi') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar\xi}{\bar\xi - \xi} \frac{\bar\xi'}{\bar\xi' - \xi'} \mathcal{F}(\bar\xi, \bar\xi', \Pi+\bar\psi, \Pi'+\bar\psi')\, dp\, dp';$$

et l'on aura par suite

$$(8)\qquad \mathcal{F}(\xi, \xi', \psi, \psi') =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar\psi\bar\psi' \frac{\bar\xi}{\bar\xi - \xi} \frac{\bar\xi'}{\bar\xi' - \xi'} \frac{1 - \xi\cos(\Pi+\bar\psi)}{\bar\psi - \xi\sin(\Pi+\bar\psi)} \frac{1 - \xi'\cos(\Pi'+\bar\psi')}{\bar\psi' - \xi'\sin(\Pi'+\bar\psi')} \mathcal{F}(\bar\xi, \bar\xi', \Pi+\bar\psi, \Pi'+\bar\psi')\, dp\, dp'\, dq\, dq',$$

en supposant les modules

$$\Xi, \Xi', \Psi, \Psi'$$

tellement choisis que l'on ait

$$(9)\qquad \xi < \Xi, \qquad (10)\qquad \xi' < \Xi',$$

$$(11)\qquad \xi \Lambda \frac{\sin(\Pi+\bar\psi)}{\bar\psi} < 1, \qquad (12)\qquad \xi' \Lambda \frac{\sin(\Pi'+\bar\psi')}{\bar\psi'} < 1.$$

Observons d'ailleurs que les conditions (11), (12) ne peuvent être remplies à moins que les excentricités ξ, ξ' ne restent inférieures à l'unité divisée par le module principal de l'expression

$$\Lambda \cdot \frac{\sin(\Pi+\bar\psi)}{\bar\psi},$$

c'est-à-dire, autrement, à $0,662742\ldots$ Cela posé, en raisonnant comme

Dans le second paragraphe de la première partie, on conclurra de la formule (4) que les différents termes du développement de

$$\mathcal{F} = f(\xi, \xi', \psi, \psi')$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon'$ et le reste de cette série offrent des valeurs numériques respectivement inférieures aux termes et au reste de la série qu'on obtiendrait en développant de la même manière l'expression

$$(14) \qquad \Lambda\, \bar\psi \bar\psi' \frac{\bar\varepsilon}{\bar\varepsilon - \varepsilon} \frac{\bar\varepsilon'}{\bar\varepsilon' - \varepsilon} \frac{1 - \varepsilon \cos(\Pi + \bar\psi)}{\bar\psi - \varepsilon \sin(\Pi + \bar\psi)} \frac{1 - \varepsilon' \cos(\Pi' + \bar\psi')}{\bar\psi' - \varepsilon' \sin(\Pi' + \bar\psi')} f(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \Pi + \bar\psi, \Pi' + \bar\psi'),$$

et, à plus forte raison, la suivante

$$(15) \qquad \Psi \Psi' \frac{\bar\varepsilon}{\bar\varepsilon - \varepsilon} \frac{\bar\varepsilon'}{\bar\varepsilon' - \varepsilon'} \frac{1 + \varepsilon \Lambda \cos(\Pi + \bar\psi)}{\bar\psi - \varepsilon \Lambda \sin(\Pi + \bar\psi)} \frac{1 + \varepsilon' \Lambda \cos(\Pi' + \bar\psi')}{-\bar\psi' - \varepsilon' \Lambda \sin(\Pi' + \bar\psi')} \Lambda f(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \Pi + \bar\psi, \Pi' + \bar\psi').$$

Ajoutons qu'en vertu de l'équation (15 bis) du § 2 de la première partie on aura

$$\Lambda \sin(\Pi + \bar\psi) = \alpha < \left\{ \left(\frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{2} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

et par conséquent

$$(16) \qquad \begin{cases} \Lambda \sin(\Pi + \bar\psi) = \alpha < \dfrac{e^{\Psi} + e^{-\Psi}}{2}, \\ \Lambda \cos(\Pi + \bar\psi) = \Lambda \sin\left(\Pi + \dfrac{\pi}{2} + \bar\psi\right) = \alpha < \dfrac{e^{\Psi} + e^{-\Psi}}{2}. \end{cases}$$

Donc l'expression (15) pourra être remplacée par celle-ci

$$(17) \qquad \Psi \Psi' \frac{\bar\varepsilon}{\bar\varepsilon - \varepsilon} \frac{\bar\varepsilon'}{\bar\varepsilon' - \varepsilon'} \frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi} + e^{-\Psi})}{\bar\psi - \frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi} + e^{-\Psi})} \frac{1 + \frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'} + e^{-\Psi'})}{\bar\psi' - \frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'} + e^{-\Psi'})} \Lambda f(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \Pi + \bar\psi, \Pi' + \bar\psi'),$$

les nombres Ψ, Ψ' étant choisis de manière à vérifier les conditions

$$(18) \qquad \varepsilon \frac{e^{\Psi} + e^{-\Psi}}{2} < \Psi, \qquad (19) \qquad \varepsilon' \frac{e^{\Psi'} + e^{-\Psi'}}{2} < \Psi'.$$

Si, dans le premier membre de l'équation (7) on substitue à la fonction

$$f(\xi, \xi', \Pi + \bar\psi, \Pi' + \bar\psi')$$

le produit

$$\frac{1-\varepsilon\cos(\Sigma+\Psi)}{\Psi-\varepsilon\sin(\Sigma+\Psi)}\;\frac{1-\varepsilon'\cos(\Sigma+\bar\Psi')}{\Psi'-\varepsilon'\sin(\Sigma+\bar\Psi')}\;\mathcal{F}(\varepsilon,\varepsilon',\Sigma+\bar\Psi,\Sigma'+\psi'),$$

Il faudrait, dans le second membre, substituer à la fonction

$$\mathcal{F}(\varepsilon,\bar\varepsilon',\Sigma+\bar\Psi,\Sigma'+\bar\Psi')$$

le produit suivant

$$\frac{1-\varepsilon\cos(\Sigma+\bar\Psi)}{\Psi-\varepsilon\sin(\Sigma+\bar\Psi)}\;\frac{1-\bar\varepsilon'\cos(\Sigma'+\bar\Psi')}{\Psi'-\bar\varepsilon'\sin(\Sigma'+\bar\Psi')}\;\mathcal{F}(\varepsilon,\bar\varepsilon',\Sigma+\bar\Psi,\Sigma'+\bar\Psi'),$$

et alors, selon la l'expression (17), on obtiendrait celle-ci

$$(20)\qquad \Psi\bar\Psi'\frac{\Sigma}{\Sigma-\varepsilon}\;\frac{\Sigma'}{\Sigma'-\varepsilon'}\;\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}(a^{\bar\Psi}+a^{-\bar\Psi})}{\bar\Psi-\frac{\varepsilon}{2}(a^{\bar\Psi}+a^{-\bar\Psi})}\;\frac{1+\frac{\varepsilon'}{2}(a^{\bar\Psi'}+a^{-\bar\Psi'})}{\bar\Psi'-\frac{\varepsilon'}{2}(a^{\bar\Psi'}+a^{-\bar\Psi'})}\;\Lambda\,\mathcal{F}(\varepsilon,\bar\varepsilon',\Sigma+\bar\Psi,\Sigma'+\bar\Psi'),$$

les nombres $\bar\Psi,\bar\Psi'$ étant choisis d'une manière à vérifier les conditions

$$(21)\qquad \Sigma\,\frac{a^{\bar\Psi}+a^{-\bar\Psi}}{2}<\bar\Psi\,,\qquad (22)\qquad \Sigma'\,\frac{a^{\bar\Psi'}+a^{-\bar\Psi'}}{2}<\bar\Psi'.$$

Il reste maintenant à trouver la valeur de

$$\Lambda\,\mathcal{F}(\varepsilon,\bar\varepsilon',\Sigma+\bar\Psi,\Sigma'+\bar\Psi'),$$

ou un nombre qui surpasse cette valeur. Or on a, par hypothèse,

$$(23)\qquad \mathcal{F}(\varepsilon,\varepsilon',\psi,\psi')=\mathcal{P}=\frac{mrr'\cos\omega^2}{\mu a^2},$$

les valeurs de $r,r',\cos\omega^2$ étant déterminées par les équations

$$(24)\qquad r=a(1-\varepsilon\cos\psi)=a'(1-\varepsilon\cos\bar\psi),$$

$$(25)\qquad r'=a'(1-\varepsilon'\cos\bar\psi'),$$

$$(26)\qquad \begin{aligned}\cos\omega^2=\;&\cos\Delta_{0,0}\cos(p-\bar\sigma)\cos(p'-\bar\sigma')+\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos(p-\bar\sigma)\sin(p'-\bar\sigma')\\&+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin(p-\bar\sigma)\cos(p'-\bar\sigma')+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin(p-\bar\sigma)\sin(p'-\bar\sigma'),\end{aligned}$$

$$(27)\qquad \cos(p-\bar\sigma)=\frac{\cos\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi},\qquad \sin(p-\bar\sigma)=\frac{\eta\sin\psi}{1-\varepsilon\cos\psi}$$

$$(28)\qquad \cos(p'-\bar\sigma')=\frac{\cos\psi-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos\psi'},\qquad \sin(p'-\bar\sigma')=\frac{\eta'\sin\psi'}{1-\varepsilon'\cos\psi'}$$

$$(29)\qquad \eta=(1-\varepsilon^2)^{\frac12},\qquad (30)\qquad \eta'=(1-\varepsilon'^2)^{\frac12},$$

Lequel entraîne

$$(31)\qquad \cos\Delta = \cos\Delta_{0,0}\,\frac{\cos\psi-\zeta}{1-\zeta\cos\psi}\,\frac{\cos\psi'-\zeta'}{1-\zeta'\cos\psi'} + \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos\psi-\zeta}{1-\zeta\cos\psi}\,\frac{(1-\zeta'^2)^{\frac12}\sin\psi'}{1-\zeta'\cos\psi'}$$
$$+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\,\frac{(1-\zeta^2)^{\frac12}\sin\psi}{1-\zeta\cos\psi}\,\frac{\cos\psi'-\zeta'}{1-\zeta'\cos\psi'} + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-\zeta^2)^{\frac12}\sin\psi}{1-\zeta\cos\psi}\,\frac{(1-\zeta'^2)^{\frac12}\sin\psi'}{1-\zeta'\cos\psi'}.$$

Donc, si l'on nomme $\cos\Lambda$ ce que devient $\cos\Delta$, quand on y remplace

$$\zeta,\ \zeta',\ \psi,\ \psi'$$

par

$$\bar\zeta,\ \bar\zeta',\ \Pi+\bar\psi,\ \Pi'+\bar\psi',$$

on aura

$$(32)\qquad \mathcal{F}(\bar\zeta,\bar\zeta',\Pi+\bar\psi,\Pi'+\bar\psi') = \frac{m'\theta}{a'}\,\frac{1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)}{\left[1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')\right]^2}\cos\Lambda,$$

la valeur de $\cos\Lambda$ étant

$$(33)\quad \cos\Lambda = \cos\Delta_{0,0}\,\frac{\cos(\Pi+\bar\psi)-\bar\zeta}{1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)}\,\frac{\cos(\Pi'+\bar\psi')-\bar\zeta'}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')} + \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos(\Pi+\bar\psi)-\bar\zeta}{1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)}\,\frac{(1-\bar\zeta'^2)^{\frac12}\sin(\Pi'+\bar\psi')}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')}$$
$$+\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\,\frac{(1-\bar\zeta^2)^{\frac12}\sin(\Pi+\bar\psi)}{1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)}\,\frac{\cos(\Pi'+\bar\psi')-\bar\zeta'}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')} + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-\bar\zeta^2)^{\frac12}\sin(\Pi+\bar\psi)}{1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)}\,\frac{(1-\bar\zeta'^2)^{\frac12}\sin(\Pi'+\bar\psi')}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')}.$$

Cela posé, on établit aisément que l'on a

$$(34)\qquad \zeta'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2} < 1,$$

on trouvera

$$(35)\qquad \Delta\mathcal{F}(\bar\zeta,\bar\zeta',\Pi+\bar\psi,\Pi'+\bar\psi') = \omega < \frac{m'\theta}{a'}\,\frac{\Lambda\left(1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)\right)\cos\Lambda}{\left[1-\frac12\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)\right]^2},$$

puis

$$\Lambda\left(1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)\right)\cos\Lambda = \omega <$$

$$\sqrt{\cos^2\Delta_{0,0}}\,\Lambda\left(\cos(\Pi+\bar\psi)-\bar\zeta\right)\Lambda\,\frac{\cos(\Pi'+\bar\psi')-\bar\zeta'}{1-\bar\zeta\cos(\Pi'+\bar\psi')} + \sqrt{\cos^2\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}}\,\Lambda\left(\cos(\Pi+\bar\psi)-\bar\zeta\right)\Lambda\,\frac{(1-\bar\zeta'^2)^{\frac12}\sin(\Pi'+\bar\psi')}{1-\bar\zeta\cos(\Pi'+\bar\psi')}$$
$$+\sqrt{\cos^2\Delta_{\frac{\pi}{2},0}}\,\Lambda\left((1-\bar\zeta^2)^{\frac12}\sin(\Pi+\bar\psi)\right)\Lambda\,\frac{\cos(\Pi'+\bar\psi')-\bar\zeta'}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')} + \sqrt{\cos^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}}\,\Lambda\left((1-\bar\zeta^2)^{\frac12}\sin(\Pi+\bar\psi)\right)\Lambda\,\frac{(1-\bar\zeta'^2)^{\frac12}\sin(\Pi'+\bar\psi')}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')},$$

et à plus forte raison

$$(36)\quad \Lambda\left(1-\bar\zeta\cos(\Pi+\bar\psi)\right)\cos\Lambda = \omega < \left\{\Lambda\left(\cos(\Pi+\bar\psi)-\bar\zeta\right)+\Lambda\left((1-\bar\zeta^2)^{\frac12}\sin(\Pi+\bar\psi)\right)\right\}\left\{\Lambda\,\frac{\cos(\Pi'+\bar\psi')-\bar\zeta}{1-\bar\zeta\cos(\Pi'+\bar\psi')}+\Lambda\,\frac{(1-\bar\zeta'^2)^{\frac12}\sin(\Pi'+\bar\psi')}{1-\bar\zeta'\cos(\Pi'+\bar\psi')}\right\}.$$

Comme on aura d'ailleurs

$$\Lambda\left(1-\bar\zeta^2\right)^{\frac12} = \left(1+\bar\zeta^2\right)^{\frac12},\qquad \Lambda\left(1-\zeta'^2\right)^{\frac12} = \left(1+\bar\zeta'^2\right)^{\frac12},$$

$$\Lambda\,\frac{1}{1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma'+\bar\psi')} = \omega < \frac{1}{1-\frac{\bar\varepsilon'}{2}\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)},$$

et Duplus

$$\frac{\cos(\Sigma'+\bar\psi)-\bar\varepsilon'}{1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma'+\bar\psi')} = \cos(\Sigma'+\bar\psi') - \bar\varepsilon'\sin^2(\Sigma'+\bar\psi') - \bar\varepsilon'^2\sin^2(\Sigma'+\bar\psi')\cos(\Sigma'+\bar\psi') - \text{etc.}\cdots,$$

par conséquent

$$(37)\qquad \Lambda\,\frac{\cos(\Sigma'+\bar\psi)-\bar\varepsilon'}{1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma'+\bar\psi')} = \omega < \frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2} + \bar\varepsilon'\left(\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)^2 + \text{etc} \qquad = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)}{1-\frac{\bar\varepsilon'}{2}\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)},$$

ou bien, à cause de l'équation (36)

$$(38)\qquad \Lambda\left(1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma+\bar\psi)\right)\cos\bar\nu = \omega < \left\{\left[1+(1-\bar\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}+\bar\varepsilon'\right\}\frac{\left[1+(1-\bar\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{1-\frac{\bar\varepsilon'}{2}\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)},$$

et de la formule (35)

$$(39)\qquad \Lambda\,\mathcal{F}(\bar\varepsilon,\bar\varepsilon',\bar\Pi+\bar\psi,\Sigma'+\bar\psi') = \omega < \frac{m'\beta}{\omega^2}\left\{\left[1+(1-\bar\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}+\bar\varepsilon\right\}\frac{\left[1+(1-\bar\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{1-\frac{\bar\varepsilon'}{2}\left(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}\right)}.$$

A l'aide des formules (17) et (39) joindre aux conditions (9), (10), (18), (19), (24), ou des formules (20) et (39), joindre aux conditions (9), (10), (21), (22), (24), on déterminera sans peine une limite supérieure à l'erreur que l'on commet, lorsque, dans le développement de l'expression (1) suivant les puissances ascendantes de ε, ε', on supprime tous les termes ou les exponentielles de ε, ε' sont respectivement supérieures à deux nombres donnés.

Supposons maintenant que la fonction $\mathcal{F}$ soit déterminée, non plus par l'équation (1), mais par l'équation (2) du 2e paragraphe, savoir,

$$(40)\qquad \mathcal{F} = \frac{m'}{\sqrt{r'^2-2rr'\cos\nu+r^2}},$$

on emploie l'une des formules (160), (177), (178), (181), (182) du même paragraphe pour développer cette fonction en une série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta,$$

et que l'on demande une limite de l'erreur commise, quand on néglige

Dans la série obtenue tous les termes où les puissances des trois quantités $\varepsilon, \varepsilon', \theta$ offrent des exposants respectivement supérieurs à trois nombres donnés. On pourra considérer P comme une fonction Φ de

$$\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi',$$

et poser en conséquence

$$\mathrm{P} = \Phi(\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi'), \tag{41}$$

les valeurs de ψ, ψ' étant celles que fournissent les équations (4). Concevons d'ailleurs que, les expressions imaginaires

$$\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\psi}, \bar{\psi}', \cos\bar{J}$$

étant déterminées par les formules (8) et (100), la valeur de θ atout toujours

$$\theta = \frac{a}{a'}, \tag{42}$$

ou prenne $\bar{\theta}$ une nouvelle expression imaginaire dont le module Θ vérifie la condition

$$\Theta > \theta, \tag{43}$$

et $\bar{r}, \bar{r}'$ ce que deviennent les rayons vecteurs r, r' déterminés par les formules (24), (127), quand on y remplace

$$\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi'$$

par

$$\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \mathrm{I}+\bar{\psi}, \mathrm{I}'+\bar{\psi}';$$

en sorte qu'on ait

$$\bar{r} = \bar{\theta} a' \left(1 - \bar{\varepsilon}\cos(\mathrm{I}+\bar{\psi})\right), \tag{44}$$

$$\bar{r}' = a' \left(1 - \bar{\varepsilon}'\cos(\mathrm{I}'+\bar{\psi}')\right). \tag{45}$$

On trouvera

$$\Phi(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \mathrm{I}+\bar{\psi}, \mathrm{I}'+\bar{\psi}') = \frac{m'}{\sqrt{\bar{r}'^2 - 2\bar{r}\bar{r}'\cos\bar{J} + \bar{r}^2}}. \tag{46}$$

Cela posé, en raisonnant comme ci-dessus, on prouvera que les différents termes du développement de la fonction

$$P = f(\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi')$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de

$$\varepsilon, \varepsilon', \theta$$

et la reste de cette série offrent des valeurs numériques respectivement inférieures aux termes et au reste qu'on obtient en développant de la même manière l'expression

$$(47)\quad \frac{\Psi}{\Psi}\frac{\Psi'}{\Psi'}\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}-\varepsilon}\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}'-\varepsilon'}\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\frac{1+\frac{\varepsilon}{\Psi}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\frac{\Psi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\frac{1+\frac{\varepsilon'}{\Psi'}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\frac{\Psi'}{2}-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\Lambda^{\frac{1}{2}}f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Pi+\bar{\psi},\Pi'+\bar{\psi}'),$$

dans laquelle $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \Theta, \Psi, \Psi'$ sont astreints aux conditions (9), (10), (14), (19), (43), autrement énoncé l'expression

$$(48)\quad \frac{\Psi}{\Psi}\frac{\Psi'}{\Psi'}\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}-\varepsilon}\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}'-\varepsilon'}\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\frac{1+\frac{\varepsilon}{\Psi}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\frac{\Psi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\frac{1+\frac{\varepsilon'}{\Psi'}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\frac{\Psi'}{2}-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\Lambda^{\frac{1}{2}}f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Pi+\bar{\psi},\Pi'+\bar{\psi}'),$$

dans laquelle $\mathfrak{L}, \mathfrak{L}', \Theta, \Psi, \Psi'$ sont astreints aux conditions (9), (10), (21), (22), (43). Il nous reste à trouver la valeur de

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Pi+\bar{\psi},\Pi'+\bar{\psi}').$$

ou un nombre qui surpasse cette valeur. Or on tire de la formule (45)

$$(49)\quad \Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Pi+\bar{\psi},\Pi'+\bar{\psi}') = \frac{M'}{\Lambda'\bar{r}'}\frac{1}{\{\Lambda'(1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos\bar{\gamma}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2})\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Soit d'ailleurs Ω un nombre égal ou supérieur à l'expression

$$(50)\quad \Lambda(\cos\bar{\gamma}-\cos\Delta_{\Pi,\Pi'})$$

la valeur de $\cos\Delta_{\Pi,\Pi'}$ étant

$$(51)\quad \begin{aligned}\cos\Delta_{\Pi,\Pi'} = {}& \cos\Delta_{0,0}\cos\Pi\cos\Pi' + \cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos\Pi\sin\Pi' \\ & + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin\Pi\cos\Pi' + \cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin\Pi\sin\Pi';\end{aligned}$$

et supposons que la condition (24) étant vérifiée, l'on ait encore

$$(52)\quad \left\{1-\Theta\frac{1+\frac{\varepsilon}{\Psi}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\right\}^2 > 2\Omega\Theta\frac{1+\frac{\varepsilon'}{\Psi'}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{1-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}.$$

On trouvera

$$\Lambda'\left(1-2\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}\cos\overline{\delta}+\frac{\overline{r}^2}{\overline{r}'^2}\right)=\omega<\Lambda'\left(1-2\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}\cos\Delta_{\Sigma,\Sigma'}+\frac{\overline{r}^2}{\overline{r}'^2}\right)-2\omega\Lambda\frac{\overline{r}}{\overline{r}'},$$

$$1-2\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}\cos\Delta_{\Sigma,\Sigma'}+\frac{\overline{r}^2}{\overline{r}'^2}=\left(1-\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}e^{\Delta_{\Sigma,\Sigma'}\sqrt{-1}}\right)\left(1-\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}e^{-\Delta_{\Sigma,\Sigma'}\sqrt{-1}}\right),$$

$$\Lambda'\left(1-\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}e^{\pm\Delta_{\Sigma,\Sigma'}\sqrt{-1}}\right)=1-\Lambda\frac{\overline{r}}{\overline{r}'},$$

$$\Lambda\frac{\overline{r}}{\overline{r}'}=\frac{\Lambda\overline{r}}{\Lambda'\overline{r}'}:$$

par suite la formule (69) donnera

$$(93)\qquad \Lambda\varphi(\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}',\overline{\theta},\Sigma+\overline{\psi},\Sigma'+\overline{\psi}')=\omega<\frac{\kappa'}{\left\{(\Lambda\overline{r}-\Lambda\overline{r})^2-2\omega\Lambda\overline{r}\Lambda\overline{r}'\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

et, comme on tirera des formules (66), (68)

$$(94)\qquad \Lambda\overline{r}=\omega<\Theta a'\left\{1+\frac{\overline{\kappa}}{a}\left(a^{\overline{\Psi}}+a^{-\overline{\Psi}}\right)\right\},$$

$$(95)\qquad \Lambda'\overline{r}'=\omega>a'\left\{1+\frac{\overline{\kappa}'}{a'}\left(a^{\overline{\Psi}'}+a^{-\overline{\Psi}'}\right)\right\},$$

on aura définitivement

$$(96)\qquad \Lambda\varphi(\overline{\varepsilon},\overline{\varepsilon}',\overline{\theta},\Sigma+\overline{\psi},\Sigma'+\overline{\psi}')=\omega<$$

$$\frac{\kappa'}{a'}\frac{1}{\left\{\left[1-\frac{\overline{\kappa}'}{2}\left(a^{\overline{\Psi}'}+a^{-\overline{\Psi}'}\right)\right]-\Theta\left(1+\frac{\overline{\kappa}}{2}\left(a^{\overline{\Psi}}+a^{-\overline{\Psi}}\right)\right)\right\}^2-2\omega\Theta\left[1+\frac{\overline{\kappa}}{2}\left(a^{\overline{\Psi}}+a^{-\overline{\Psi}}\right)\right]\left[1-\frac{\overline{\kappa}'}{2}\left(a^{\overline{\Psi}'}+a^{-\overline{\Psi}'}\right)\right]\Big\}^{\frac{1}{2}}}$$

il ne reste plus qu'à déduire la valeur de κ de l'équation (88). Or, si l'on pose

$$(97)\qquad \overline{v}=1-(1-\overline{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}^2+\frac{1.1}{2.4}\overline{\varepsilon}^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\overline{\varepsilon}^6+\text{etc.},$$

$$(98)\qquad \overline{v}'=1-(1-\overline{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\overline{\varepsilon}'^2+\frac{1.1}{2.4}\overline{\varepsilon}'^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\overline{\varepsilon}'^6+\text{etc.},$$

$$(99)\qquad V=\frac{1}{2}\mathfrak{E}^2+\frac{1.1}{2.4}\mathfrak{E}^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\mathfrak{E}^6+\text{etc.}=1-(1-\mathfrak{E}^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$(100)\qquad V'=\frac{1}{2}\mathfrak{E}'^2+\frac{1.1}{2.4}\mathfrak{E}'^4+\frac{1.1.3}{2.4.6}\mathfrak{E}'^6+\text{etc.}=1-(1-\mathfrak{E}'^2)^{\frac{1}{2}},$$

on tirera des formules (99) et (91)

$$(101)\qquad \cos\overline{\delta}=\frac{\cos\Delta_{\Sigma+\overline{\psi},\Sigma'+\overline{\psi}'}-\overline{\varepsilon}\overline{\varepsilon}'\cos\Delta_{0,\Sigma'+\overline{\psi}'-\Sigma-\overline{\psi},0}}{\left(1-\overline{\varepsilon}\cos(\Sigma+\overline{\psi})\right)\left(1-\overline{\varepsilon}'\cos(\Sigma'+\overline{\psi}')\right)}$$

$$=\frac{\overline{v}\left(\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\Sigma'+\overline{\psi}'-\Sigma-\overline{\psi},0}-\overline{\varepsilon}'\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sin(\Sigma+\overline{\psi})+\overline{v}'\left(\cos\Delta_{\Sigma+\overline{\psi},\frac{\pi}{2}}-\overline{\varepsilon}\cos\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\right)\sin(\Sigma'+\overline{\psi}')-\overline{v}\overline{v}'\cos\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin(\Sigma+\overline{\psi})\sin(\Sigma'+\overline{\psi}')}{\left(1-\overline{\varepsilon}\cos(\Sigma+\overline{\psi})\right)\left(1-\overline{\varepsilon}'\cos(\Sigma'+\overline{\psi}')\right)};$$

et, comme on aura d'autre part

(62) $$\cos\Delta_{\Sigma+\bar\Sigma,\,\Sigma'+\bar\Sigma'} = \cos\Delta_{\Sigma,\Sigma'}\cos\bar\Sigma\cos\bar\Sigma' + \cos\Delta_{\Sigma,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}\cos\bar\Sigma\sin\bar\Sigma' + \cos\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'}\sin\bar\Sigma\cos\bar\Sigma' + \cos\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'+\frac{\pi}{2}}\sin\bar\Sigma\sin\bar\Sigma',$$

(63) $$\Lambda\sin\bar\Sigma = \frac{e^{\bar\Sigma}-e^{-\bar\Sigma}}{2}, \qquad \Lambda\cos\bar\Sigma = \frac{e^{\bar\Sigma}+e^{-\bar\Sigma}}{2},$$

(64) $$\Lambda\sin\bar\Sigma' = \frac{e^{\bar\Sigma'}-e^{-\bar\Sigma'}}{2}, \qquad \Lambda\cos\bar\Sigma' = \frac{e^{\bar\Sigma'}+e^{-\bar\Sigma'}}{2},$$

(65) $$\Lambda\,\frac{1}{1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma+\bar\Sigma)} = \sum \frac{1}{1-\bar\Sigma\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}},$$

(66) $$\Lambda\,\frac{1}{1-\bar\varepsilon'\cos(\Sigma'+\bar\Sigma')} = \sum \frac{1}{1-\bar\Sigma'\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}},$$

(67) $$\Lambda\left(\frac{\cos\bar\Sigma}{1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma+\bar\Sigma)}\,\frac{\cos\bar\Sigma'}{1-\bar\varepsilon'\cos(\Sigma'+\bar\Sigma')}\right) = \sum \frac{\frac12(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}{1-\frac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}\,\frac{\frac12(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}{1-\frac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})} - 1,$$

on trouvera

(68) $$\Lambda\left\{\frac{\cos\Delta_{\Sigma+\bar\Sigma,\,\Sigma'+\bar\Sigma'}}{(1-\bar\varepsilon\cos(\Sigma+\bar\Sigma))(1-\bar\varepsilon'\cos(\Sigma'+\bar\Sigma'))} - \cos\Delta_{\Sigma,\Sigma'}\right\} = \sum$$

$$\left\{\frac{\frac12(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}{1-\frac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}\,\frac{\frac12(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}{1-\frac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})} - 1\right\}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'}} + \frac{\frac12(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}{1-\frac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}\,\frac{\frac12(e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'})}{1-\frac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}}$$

$$+ \frac{\frac12(e^{\Sigma}-e^{-\Sigma})}{1-\frac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}\,\frac{\frac12(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}{1-\frac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'}} + \frac{\frac12(e^{\Sigma}-e^{-\Sigma})}{1-\frac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma})}\,\frac{\frac12(e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'})}{1-\frac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'})}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'+\frac{\pi}{2}}},$$

(69) $$\Lambda\cos\Delta_{\Sigma+\bar\Sigma,\,0} = \sum \frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,0}} + \frac{e^{\Sigma}-e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},0}},$$

(70) $$\Lambda\cos\Delta_{0,\Sigma'+\bar\Sigma'} = \sum \frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{0,\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{0,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}},$$

etc..., et par suite on pourra prendre pour valeur de Δ celle qui détermine l'équation

(71) $$-2\,(1-\tfrac{\bar\Sigma}{2}(e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}))(1-\tfrac{\bar\Sigma'}{2}(e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}))$$

$$= \left\{\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\,\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2} - (1-\tfrac{\bar\Sigma}{2}\tfrac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2})(1-\tfrac{\bar\Sigma'}{2}\tfrac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2})\right\}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\,\frac{e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}}$$

$$+ \frac{e^{\Sigma}-e^{-\Sigma}}{2}\,\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma}-e^{-\Sigma}}{2}\,\frac{e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'+\frac{\pi}{2}}}$$

$$+ \bar\Sigma\left\{\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{0,\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma}-e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{0,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}}\right\} + \bar\Sigma'\left\{\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,0}} + \frac{e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},0}}\right\}$$

$$+ \bar\Sigma\bar\Sigma'\sqrt{\cos^2\Delta_{0,0}}$$

$$+ \cup\left\{\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma}-e^{-\Sigma}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'+\frac{\pi}{2}}} + \bar\Sigma'\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,0}}\right\}\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}$$

$$+ \cup'\left\{\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'}} + \frac{e^{\Sigma'}-e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2},\Sigma'}} + \bar\Sigma\sqrt{\cos^2\Delta_{0,\Sigma'}}\right\}\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}$$

$$+ \cup\cup'\,\frac{e^{\Sigma}+e^{-\Sigma}}{2}\,\frac{e^{\Sigma'}+e^{-\Sigma'}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma,\Sigma'}}.$$

On pourrait à plus forte raison prendre pour valeur de n celle qu'on déduirait de l'équation (71) en remplaçant par l'unité chacun des cosinus renfermés sous le signe $\sqrt{\ }$ dans le second membre de cette équation, et l'on trouverait alors

$$(72)\qquad n = \frac{e^{\frac{\Psi}{2}+\frac{\Psi'}{2}+\nu}\frac{e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}{2}}{1-\varepsilon\frac{e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}{2}}\ \frac{e^{\frac{\Psi'}{2}+\frac{\Psi}{2}+\nu'}\frac{e^{\frac{\Psi'}{2}}+e^{-\frac{\Psi'}{2}}}{2}}{1-\varepsilon'\frac{e^{\frac{\Psi'}{2}}+e^{-\frac{\Psi'}{2}}}{2}} - 1.$$

A l'aide des formules (47), (56) et (71) ou (72), jointes aux conditions (9), (10) (18), (19), (24), (25), (52) et (57), on déterminera sans peine une limite supérieure à l'erreur commise, lorsque dans le développement de la fonction (60) suivant les puissances ascendantes des trois quantités

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta,$$

on néglige tous les termes où les exposants de ces quantités surpassent des nombres donnés.

Il est bon d'observer que, si les excentricités ε, ε' sont très petites, on vérifiera les conditions (9), (10), (18), (19), (21), (22), (24) et (57) en attribuant aux quantités

$$\nu,\ \nu',\ \frac{\Psi}{2},\ \frac{\Psi'}{2}$$

des valeurs pareillement très petites, car quantités étant tellement choisies que ν, $\frac{\Psi}{2}$ diffèrent très peu de ε, et ν', $\frac{\Psi'}{2}$ de ε'. Alors, si on écrivait

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \frac{\nu}{\varepsilon}-1,\ \frac{\frac{\Psi}{2}}{\varepsilon}-1,\ \frac{\nu'}{\varepsilon'}-1,\ \frac{\frac{\Psi'}{2}}{\varepsilon'}-1,$$

comme des quantités très petites du premier ordre, on négligera dans les seconds membres des formules (71), (72), les quantités du second ordre, ces formules donneront pour valeurs approchées de n

$$(73)\qquad \varepsilon(\varepsilon+\varepsilon')\sqrt{\cos^2\Delta_{\Pi,\Pi'}} + \varepsilon'\sqrt{\cos^2\Delta_{\Pi,\Pi'+\frac{\Psi}{2}}} + \varepsilon\sqrt{\cos^2\Delta_{\Pi+\frac{\Psi}{2},\Pi'}},$$

et

$$(74)\qquad 2(\varepsilon+\varepsilon').$$

Turin 1852.

Addition

Lorsqu'on adoptant les notations employées dans le second paragraphe de la première partie, on désigne par f le module de la variable réelle ou imaginaire x, et par

$$\overline{x} = X e^{p\sqrt{-1}}$$

une expression imaginaire dont le module est X, alors en supposant la fonction $f(x)$ telle que $f(\overline{x})$ reste finie et continue pour les valeurs attribuées à X lorsque X conserve une valeur déterminée, on a

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2\dots n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n}\, dp. \tag{1}$$

Par suite la somme des n premiers termes du développement de $f(x)$ suivant les puissances ascendantes de x, ou

$$f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2\dots(n-1)} f^{(n-1)}(0) \tag{2}$$

deviendra

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(1 + \frac{x}{\overline{x}} + \dots + \frac{x^{n-1}}{\overline{x}^{n-1}}\right) f(\overline{x})\, dp,$$

et pourra être représentée, quelque soit le module X, par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x}^n - x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x} - x)}\, dp. \tag{3}$$

Revenant à la formule (6) du § 2 de la première partie, savoir,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x}}{\overline{x} - x} f(\overline{x})\, dp, \tag{4}$$

elle ne sera généralement vraie que dans le cas où l'on aura

$$X > f\,; \tag{5}$$

et c'est dans le même cas que le reste de la série (2), pouvant être représenté par l'intégrale

(6) $$\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\,f(\bar{x})\,d\varphi$$

opère au module inférieur au produit

(7) $$\frac{\xi^n}{x^{n-1}(x-\xi)}\,\Lambda\, f(\bar{x}),$$

c'est à dire au développement de

(8) $$\frac{x}{x-\xi}\,\Lambda\, f(\bar{x})$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ. Il est bon d'observer 1° que, si, dans les deux membres de l'équation (4) développée suivant les puissances ascendantes de x, on conserve seulement les puissances d'un degré inférieur à n, on obtiendra précisément l'équation

(9) $$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ldots+\frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\ldots(n-1)}f^{(n-1)}(0)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{x}^n-x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\,f(\bar{x})\,d\varphi;$$

2° qu'en vertu de ce qui a été dit précédemment l'équation (9) subsistera pour une valeur quelconque du module x, tandis que l'équation (4) doit être restreinte au cas où l'on a

$$x>\xi.$$

Pareillement, si, en supposant y déterminée en fonction de x par l'équation

(10) $$y=b+x\varpi(y)$$

on désigne par

$$\bar{z}=Z_1 e^{q\sqrt{-1}}$$

une expression imaginaire dont Z_1 soit le module, la formule (148) du § 2 de la première partie, savoir,

(11) $$\Sigma(x,y)=\frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-x\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z}-x\varpi(b+\bar{z})}\,\Sigma(x,b+\bar{z})\,d\varphi$$

et les équations déduites des formules (4) et (11), savoir,

(12) $$\mathcal{I}(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-\pi'}^{\pi'}\int_{-\pi'}^{\pi'} \zeta\, \frac{\pi}{\pi - x}\, \frac{1 - x\varpi'(b+\zeta)}{\zeta - x\varpi(b+\zeta)}\, \mathcal{I}'(x, b+\zeta)\, \partial p \partial q,$$

(13) $$\mathcal{I}(x,y) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{-\pi'}^{\pi'}\int_{-\pi'}^{\pi'} \zeta\, \frac{\overline{\pi}}{\overline{\pi} - x}\, \frac{1 - \overline{x}\,\overline{\varpi}'(b+\zeta)}{\zeta - \overline{x}\,\overline{\varpi}(b+\zeta)}\, \mathcal{I}'(\overline{x}, b+\zeta)\, \partial p \partial q,$$

ne seront généralement vraies, la première que dans le cas où le module de ζ vérifiera la condition

(14) $$\xi \wedge \frac{\varpi(b+\zeta)}{\zeta} < 1,$$

la seconde que dans le cas où l'on aura simultanément

(15) $$\xi < \overline{X}, \qquad \xi \wedge \frac{\varpi(b+\zeta)}{\zeta} < 1,$$

et la troisième que dans le cas où l'on aura

(16) $$\xi < X \qquad X \wedge \frac{\varpi(b+\zeta)}{\zeta} < 1.$$

C'est aussi, dans les mêmes cas que le reste du développement de $\mathcal{I}(x,y)$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x offrira un module inférieur au reste du développement de l'expression

(17) $$\frac{X}{X - \xi}\, \frac{\zeta}{\zeta}\, \frac{1 + \xi \wedge \varpi'(b+\zeta)}{\zeta - \xi \wedge \varpi(b+\zeta)}\, \wedge\, \mathcal{I}'(\overline{x}, b+\zeta),$$

ou

(18) $$\frac{X}{X - \xi}\, \frac{\zeta}{\zeta}\, \wedge\, \frac{1 - \overline{x}\,\varpi'(b+\zeta)}{\zeta - \overline{x}\,\varpi(b+\zeta)}\, \mathcal{I}'(\overline{x}, b+\zeta)$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ. Mais, si dans les deux membres de la formule (12) ou (13) développés suivant les puissances ascendantes de x, on conserve seulement les termes qui renferment des puissances d'un degré inférieur à n, l'équation ainsi obtenue subsistera pour des valeurs quelconques des modules X et ζ.

Il est facile d'étendre ces remarques aux fonctions de plusieurs variables. Considérons, pour fixer les idées, une fonction

$$f(x, x')$$

de deux variables x, x' dont les modules soient respectivement ξ, ξ'. Si l'on désigne par

$$\bar{x} = X + a^{p\sqrt{-1}}, \qquad \bar{x}' = X' + a'^{p'\sqrt{-1}},$$

deux expressions imaginaires dont les modules soient X, X', et si l'on développe $f(x, x')$ en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, le reste de cette série offrira un module inférieur au reste du développement de l'expression

$$\frac{X}{X - \xi} M f(\bar{x}, \bar{x}') \tag{19}$$

en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, par conséquent un module inférieur au produit

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X - \xi)} M f(\bar{x}, x'), \tag{20}$$

le module X de $\bar{x}$ étant assujetti à vérifier la condition

$$X > \xi,$$

tandis que la somme des termes qui renferment des puissances de x d'un degré inférieur à n sera représentée par l'intégrale simple

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)} f(\bar{x}, x') \, dp, \tag{21}$$

ou, ce qui revient au même, par l'intégrale double

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}'}{\bar{x}' - x'} \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x} - x)} f(\bar{x}, \bar{x}') \, dp \, dp' \tag{22}$$

le module X pouvant être supérieur ou inférieur à ξ, et le module X' devant rester supérieur à ξ'. Si maintenant on développe la fonction (21)

ou (22) on une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de x', le reste de la série prolongée jusqu'au terme qui renferme la puissance $x'^{n'}$ offrira un module inférieur au reste du développement de l'expression

$$\frac{X'}{X'-\xi'}\,\Lambda\,\frac{\bar{x}^n-x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\,\varphi(\bar{x},\bar{x}'), \tag{23}$$

et, à fortiori, au reste du développement de l'expression

$$\frac{X'}{X'-\xi'}\,\frac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-x)}\,\Lambda\,\varphi(\bar{x},\bar{x}') \tag{24}$$

ou même série ordonnée suivant les puissances décroissantes de ξ', c'est-à-dire, au produit

$$\frac{\xi'^{n'}}{X'^{n'-1}(X'-\xi')}\,\frac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda\,\varphi(\bar{x},\bar{x}'), \tag{25}$$

X pouvant être supérieur ou inférieur à ξ, et X' devant rester supérieur à ξ'. En ajoutant le produit (25) au produit (20), on obtiendra une limite supérieure à l'erreur que l'on commet, lorsque, dans le développement de la fonction

$$\varphi(x,x')$$

suivant les puissances décroissantes de x, x', on conserve seulement les termes qui renferment des puissances de x d'un degré inférieur à n, et des puissances de x' d'un degré inférieur à n'. Donc on définira cette erreur au moyen de la somme des nombres que fournira la valeur des deux produits

$$\frac{X}{X-\xi}\,\Lambda\,\varphi(\bar{x},x'), \tag{19}$$

$$\frac{X'}{X'-\xi'}\,\frac{X}{X-\xi}\,\Lambda\,\varphi(\bar{x},\bar{x}') \tag{26}$$

lorsque, supposant, dans le premier produit

$$x > \xi,$$

Dans le second

$$x' > \xi' \quad \text{et} \quad x > \text{ou} < \xi,$$

on remplace la fraction

$$\frac{x}{x-\xi},$$

dans le second produit, par la somme des premiers termes du développement de cette fraction en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, dans le premier produit, par la valeur de la même série, puis la fraction

$$\frac{x'}{x'-\xi'}$$

par la valeur de son développement en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ' et prolongée jusqu'au terme qui renferme la puissance $\xi'^{n'-1}$.

Parallèlement, si, dans le développement de

$$f(x, y, z, \dots)$$

suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \dots$ on néglige tous les termes, dans lesquels les exposants des variables $x, y, z, \dots$ sont respectivement égaux ou supérieurs à des nombres donnés

$$n, n', n'', \dots,$$

la somme des termes négligés offrira une limite inférieure à la somme des nombres que fournit la suite des produits

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{c} \frac{x}{x-\xi} \Lambda f(x, y, z, \dots), \\ \frac{y}{y-\eta} \frac{x}{x-\xi} \Lambda f(x, y, z, \dots), \\ \frac{z}{z-\zeta} \frac{y}{y-\eta} \frac{x}{x-\xi} \Lambda f(x, y, z, \dots), \\ \text{etc.} \dots, \end{array} \right.$$

Soit $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ étant les modules de $x, y, z, \ldots$ et $X, Y, Z, \ldots$ les modules de $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}, \ldots$ on suppose, dans la première produite,

$$X > \xi,$$

dans la seconde

$$Y > \eta,$$

X étant supérieur ou inférieur à ξ; dans la troisième

$$Z > \zeta,$$

X étant supérieur ou inférieur à ξ, Y supérieur ou inférieur à η, etc..., et que l'on remplace la fraction

$$\frac{X}{X-\xi}$$

dans la seconde, la troisième ... produites, par la somme des n premiers termes du développement de cette fraction en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de ξ, dans la première produite par le reste de cette même série; puis la fraction

$$\frac{Y}{Y-\eta},$$

dans la troisième produit et les suivantes par la somme des n' premiers termes du développement de cette fraction en une série ordonnée selon les puissances ascendantes de η, dans la seconde produite par le reste de la même série; puis la fraction

$$\frac{Z}{Z-\zeta}$$

dans la quatrième produit et les suivantes par la somme des n'' premiers termes du développement de cette fraction en une série ordonnée selon les puissances ascendantes de ζ, dans la troisième produit par le reste de cette même série, etc.... Donc, en définitive, la somme des termes négligés offrira un module inférieur à la somme des expressions

$$(28)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\, \Delta f(\bar{x}, y, z, \ldots), \\ \dfrac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\dfrac{\eta^{n'}}{Y^{n'-1}(Y-\eta)}\, \Delta^2 f(\bar{x}, \bar{y}, z, \ldots), \\ \dfrac{X^n-\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\dfrac{Y^{n'}-\eta^{n'}}{Y^{n'-1}(Y-\eta)}\,\dfrac{\zeta^{n''}}{Z^{n''-1}(Z-\zeta)}\, \Delta^3 f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots) \\ \text{etc.} \ldots ; \end{array} \right.$$

et, quand on calculera la valeur numérique de cette expression, on devra supposer $X > \xi$ dans la première, $Y > \eta$ dans la seconde, $Z > \zeta$ dans la troisième, ... Mais rien n'empêchera de changer, en faisant d'une expression aux suivantes, la valeur attribuée à X, ou à Y, ou à Z, ... et de supposer par exemple $X < \xi$ dans la seconde, la troisième ... exposant $Y < \eta$ dans la troisième ...., etc.... Ajoutons que les valeurs attribuées aux modules X, Y, Z, ... devront toujours être telles que la fonction

$$f(\bar{x}, y, z, \ldots), \quad f(\bar{x}, \bar{y}, z, \ldots), \quad f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots), \text{ etc.} \ldots$$

restent finie et continue pour ces mêmes valeurs ou pour des valeurs plus petites.

Observons encore i° qu'en vertu de ce qui a été dit plus haut la somme des termes qui, dans le développement des

$$f(x, y, z, \ldots)$$

renferment des puissances de x d'un degré inférieur à n sera représentée par l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\, f(\bar{x}, y, z, \ldots)\, dp, \qquad (29)$$

le module X de $\bar{x}$ pouvant être supérieur ou inférieur à ξ; 2° qu'en vertu du principe établi dans le § 2 de la première partie la somme des termes qui, dans le développement de l'intégrale (29) en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $y, z, \ldots$ renferment

des puissances de $y, z, \dots$ de degrés respectivement égaux ou supérieurs aux nombres $n', n'', \dots$ offrira un module inférieur à la somme des termes qui renfermeront les mêmes puissances de $\eta, \zeta, \dots$ dans le développement du produit

$$(30) \qquad \frac{Y}{Y-\eta}\,\frac{Z}{Z-\zeta}\cdots \Lambda \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\, f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots)$$

par conséquent un module inférieur à

$$(31) \qquad \frac{Y^{n'}Z^{n''}\cdots - (Y^{n'}-\eta^{n'})(Z^{n''}-\zeta^{n''})\cdots}{Y^{n'-1}Z^{n''-1}\cdots (Y-\eta)(Z-\zeta)} \Lambda \frac{\bar{x}^n - x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\, f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots),$$

et, à plus forte raison, à

$$(32) \qquad \frac{Y^{n'}Z^{n''}\cdots - (Y^{n'}-\eta^{n'})(Z^{n''}-\zeta^{n''})\cdots}{Y^{n'-1}Z^{n''-1}\cdots (Y-\eta)(Z-\zeta)\cdots} \frac{X^n - \xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \dots).$$

Donc, si, dans le développement de $f(x, y, z, \dots)$ on ordonne suivant les puissances ascendantes de $x, y, z, \dots$ on conservera seulement les termes qui renferment des puissances de $x, y, z, \dots$ dont les degrés soient respectivement inférieurs aux nombres

$$n, n', n'', \dots$$

l'erreur commise offrira un module inférieur non seulement à la somme des expressions (28), mais aussi à la somme qu'on obtient quand à la première des expressions (28) on ajoutera l'expression (32). Il est important de remarquer que le module $\mathfrak{M}$ qui, dans la première des expressions (28) doit vérifier la condition (5) peut cesser de vérifier la condition dont il s'agit et devenir inférieur à $\frac{1}{2}$ dans l'expression (32), mais que dans cette dernière Y, Z sont astreints aux conditions

$$(33) \qquad Y > \eta, \quad Z > \zeta, \quad \text{etc.}\dots$$

On appliquera facilement les principes que nous venons d'exposer à la détermination d'une limite de l'erreur que l'on-

connect lorsque, dans le développement de l'expression (40) du § 4 [2e partie] suivant les puissances descendantes de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$, on conserve seulement les termes où les puissances de

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta$$

offrent des exposants respectivement inférieurs aux nombres

$$n,\ n',\ j.$$

En effet, posons comme dans ce paragraphe

$$\frac{m'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'\cos\delta + r^2}} = \mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi') = \mathcal{F}. \tag{34}$$

La somme des termes négligés offrira un module inférieur à la somme des nombres qu'obtient en prenant pour

$$\frac{\Theta}{\Theta - \theta} \Lambda \mathcal{F}(\varepsilon, \varepsilon', \theta, \psi, \psi') \tag{35}$$

$$\Psi\Psi' \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\varepsilon'}{1-\varepsilon'}\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\frac{1+\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})} \Lambda \mathcal{F}(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \bar\theta, \bar\psi, \bar\psi'), \tag{36}$$

lorsque, $\varepsilon, \varepsilon', \Theta, \Psi, \Psi'$ étant les modules de $\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \bar\theta, \bar\psi, \bar\psi'$, on choisit ces modules de manière à vérifier dans le premier produit la condition

$$\Theta > \theta, \tag{37}$$

et dans le second produit les conditions suivantes

$$\varepsilon < \bar\varepsilon, \quad \varepsilon' < \bar\varepsilon', \quad \varepsilon\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} < \Psi, \quad \varepsilon'\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} < \Psi'; \tag{38}$$

et que l'on remplace la fraction

$$\frac{\Theta}{\Theta - \theta}$$

dans le premier produit par le reste de son développement en une série ordonnée suivant les puissances descendantes de θ et arrêtée avant le terme qui renferme θ^j; dans le second produit par la somme des j premiers termes de cette même série; puis

l'expression

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\xi}\,\frac{\varepsilon'}{\varepsilon'-\xi'}$$

par la somme d'autres qui, dans le développement de cette expression suivant les puissances ascendantes de ξ, ξ' renferment des puissances de ξ d'un degré égal ou supérieur à n, ou des puissances de ξ' d'un degré égal ou supérieur à n'. Par conséquent la somme d'autres négligées offrira un module inférieur à la somme des nombres qu'on trie des deux produits

$$\frac{\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)}\,\Lambda\,\oint(\xi,\xi',\overline{\theta},\psi,\psi'), \tag{39}$$

$$\frac{\Psi^n\Psi'^{n'}}{\Xi^{n-1}\Xi'^{n'-1}(\Xi-\xi)(\Xi'-\xi')}\,\frac{\Theta^j-\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)}\,\frac{1+\frac{\Xi}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\Xi}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\frac{1+\frac{\Xi'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{\Xi'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\,\Lambda\,\oint(\xi,\xi',\overline{\theta},\Xi+\overline{\psi},\Xi'+\overline{\psi'}), \tag{40}$$

lorsqu'on suppose dans le premier produit $\Theta > \theta$, et dans le second produit Ξ, Ξ', Ψ, Ψ' choisis de manière à vérifier les conditions (28), Θ pouvant alors cesser de vérifier la condition (37). Ajoutons qu'au produit (40) on pourrait substituer la somme des deux suivants

$$\frac{\Psi^n}{\Xi^{n-1}(\Xi-\xi)}\,\frac{\Theta^j-\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)}\,\frac{1+\frac{\Xi}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\Xi}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\Lambda\,\oint(\xi,\xi',\overline{\theta},\Xi+\overline{\psi},\psi'), \tag{41}$$

$$\frac{\Psi^n\Psi'^{n'}}{\Xi^{n-1}\Xi'^{n'-1}(\Xi-\xi)(\Xi'-\xi')}\,\frac{\Theta^j-\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)}\,\frac{1+\frac{\Xi'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{\Xi'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\,\Lambda\,\oint(\xi,\xi',\overline{\theta},\Xi+\overline{\psi},\Xi'+\overline{\psi'}), \tag{42}$$

et observons que, dans le dernier de ces deux nouveaux produits le module a cessé de vérifier la condition $\Xi > \varepsilon$. D'ailleurs en supposant

$$\theta < \Theta < \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon'}, \tag{43}$$

et par suite

$$r' > r, \tag{44}$$

on aura, en vertu des équations (24), (25) du § 4 [2e partie]

$$\oint(\xi,\xi',\theta,\psi,\psi') = \frac{\omega'}{r'^{\frac{1}{2}}\left\{1-\theta\frac{1-\xi e^{i\psi}}{1-\xi e^{-i\psi}}e^{2i\psi}\right\}^{\frac{1}{2}}\left\{1-\theta\frac{1-\xi' e^{i\psi'}}{1-\xi' e^{-i\psi'}}e^{-2i\psi'}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{45}$$

(46) $$\Lambda \frac{1}{\left(1-\bar\theta\,\frac{1-\varepsilon\omega\psi}{1-\varepsilon\omega\psi'}\,e^{\pm\varepsilon\sqrt{-1}}\right)^{\frac12}} = o\omega < \frac{1}{\left(1-\Theta\,\frac{1-\varepsilon\omega\psi}{1-\varepsilon\omega\psi'}\right)^{\frac12}} = \frac{1}{\left(1-\frac{\Theta r}{\theta r'}\right)^{\frac12}},$$

(47) $$\Lambda \phi(\varepsilon,\varepsilon',\bar\theta,\psi,\psi') = o\omega < \frac{m'}{r-\frac{\Theta}{\theta}r'}$$

et à plus forte raison

(48) $$\Lambda \phi(\varepsilon,\varepsilon',\bar\theta,\psi,\psi') = o\omega < \frac{m'}{a'\{1-\varepsilon'-\Theta(1+\varepsilon)\}}.$$

Donc l'expression (39) pourra être remplacée par la suivante

(49) $$\frac{m'}{a'}\,\frac{\theta^j}{\Theta^{j-1}(\Theta-\theta)}\,\frac{1}{1-\varepsilon'-\Theta(1+\varepsilon)},$$

dans laquelle Θ doit vérifier la Double condition (40) qui entraîne toujours celle-ci

(50) $$\theta < \frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon}.$$

Si, dans l'expression (49) on attribue à Θ la valeur qui fournit le maximum du produit

$$\Theta^j\{1-\varepsilon'-\Theta(1+\varepsilon)\},$$

savoir

$$\Theta = \frac{j}{j+1}\,\frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon},$$

en supposant j assez considérable pour que cette valeur de Θ surpasse θ, l'expression (49) deviendra

$$(j+1)\,\frac{\left(1+\frac1j\right)^j\left(\frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon'}\right)^j}{1-\left(1+\frac1j\right)\frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon'}}\,\frac{m'}{a'(1-\varepsilon')},$$

et, comme on aura

$$\left(1+\frac1j\right)^j < e,$$

elle pourra être remplacée par la suivante

(51) $$\frac{m'}{a'}\,\frac{(j+1)\,e}{1-\varepsilon'-\left(1+\frac1j\right)\theta(1+\varepsilon)}\left(\frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon'}\right)^j.$$

Considérons maintenant le produit (40) dans lequel Θ peut devenir intérieur à 0. On pourra, dans ce produit remplacer le facteur

$$\Lambda\, \beta(\bar\varepsilon, \bar\varepsilon', \bar\vartheta, \bar\Sigma + \bar\psi, \bar\Sigma' + \bar\psi')$$

par le second membre de la formule (56) du § 4 2e partie, la valeur de Λ étant déterminée par l'équation (71) ou (72) du même paragraphe, et les modules

$$\Theta,\ \tfrac{k}{2},\ \tfrac{k'}{2},\ \Psi,\ \Psi'$$

étant choisis de manière à vérifier non seulement les conditions (56), mais encore les suivantes

$$\left\{1 - \Theta\,\frac{1+\frac{k}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{k'}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\right\}^2 > 2\Lambda\,\Theta\,\frac{1+\frac{k}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{k'}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}, \tag{52}$$

$$\Lambda\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} < 1, \qquad \Lambda'\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} < 1. \tag{53}$$

Il importe d'observer que la valeur attribuée au module Θ doit être telle que la condition (52) soit vérifiée non seulement pour cette même valeur, mais aussi pour une valeur plus petite. Or c'est ce qui arrivera si l'on prend

$$\Theta = \frac{1}{2(\Lambda+1)}\,\frac{1-\frac{k'}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1+\frac{k}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}, \tag{54}$$

et alors le second membre de la formule (56) du § 4 [2e partie] sera réduit à

$$\frac{m'}{a'\Theta\left(1+\frac{k}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})\right)} \tag{55}$$

On pourra donc au produit (40) substituer l'expression

$$\frac{m'}{a'}\,\frac{\bar\varepsilon^{m'}\bar\varepsilon'^{n'}-(\bar\varepsilon-\bar\varepsilon')^{m'}(\bar\varepsilon'-\bar\varepsilon')^{n'}}{\bar\varepsilon^{m'-1}\bar\varepsilon'^{n'-1}-(\bar\varepsilon-\bar\varepsilon')^{m'-1}(\bar\varepsilon'-\bar\varepsilon')^{n'-1}}\,\frac{\Theta^{i-\beta i}}{\Theta^{i}\left(\Sigma-\vartheta\right)}\,\frac{1+\Lambda'\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{\left(\Psi-\Lambda\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(\Psi-\Lambda'\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)}, \tag{56}$$

la valeur de Θ étant déterminée par la formule (54) d'laquelle on tirera, en la combinant avec la formule (72) du § 4 [2e partie],

$$(57)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\,\frac{1-\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1+\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\,\frac{\left(1-\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)^2}{\left(e^{\Psi}+\mathcal{E}+\upsilon\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(e^{\Psi'}+\mathcal{E}'+\upsilon'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)},$$

les valeurs de υ, υ' étant toujours

$$(54)\qquad \upsilon = 1-(1-\mathcal{E}^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad \upsilon' = 1-(1-\mathcal{E}'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Il peut d'ailleurs y avoir nécessairement substituer à l'expression (56) une quantité plus considérable, et par suite au nombre Θ renfermé dans la fraction

$$(55)\qquad \frac{\theta^j-\theta^{j'}}{\Theta^j(\theta-\theta)} = \frac{1}{\Theta^j} + \frac{\theta}{\Theta^{j+1}} + \cdots + \frac{\theta^{j-1}}{\Theta^j}$$

un nombre plus petit, ou, ce qui revient au même attribuer à Θ une valeur inférieure à celle que détermine l'équation (57). Cela posé, comme on aura évidemment

$$\frac{\mathcal{E}^n-\mathcal{E}'^{n'}}{\mathcal{E}^{n-1}-\mathcal{E}'^{n'-1}}\,\frac{(\mathcal{E}^n-\varepsilon^n)(\mathcal{E}'^{n'}-\varepsilon'^{n'})}{(\mathcal{E}-\varepsilon)(\mathcal{E}'-\varepsilon')} < \left(\frac{\varepsilon^n}{\mathcal{E}^n}+\frac{\varepsilon'^{n'}}{\mathcal{E}'^{n'}}\right)\frac{1}{(1-\frac{\varepsilon}{\mathcal{E}})(1-\frac{\varepsilon'}{\mathcal{E}'})},$$

$$\upsilon = 1-(1-\mathcal{E}^2)^{\frac{1}{2}} < 1-(1-\varepsilon^2) < \varepsilon^2, \qquad \upsilon' < \varepsilon'^2,$$

il est clair qu'à l'expression (56) on pourra substituer la somme des expressions

$$(60)\qquad \frac{n'}{a'}\,\frac{1+\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\left(\frac{\Psi}{\mathcal{E}}-\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(\frac{\Psi'}{\mathcal{E}'}-\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)}\,\frac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^j(\theta-\Theta)}\,\frac{1}{(1-\frac{\varepsilon}{\mathcal{E}})(1-\frac{\varepsilon'}{\mathcal{E}'})}\left(\frac{\varepsilon}{\mathcal{E}}\right)^n,$$

$$(61)\qquad \frac{n'}{a'}\,\frac{1+\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\left(\frac{\Psi}{\mathcal{E}}-\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(\frac{\Psi'}{\mathcal{E}'}-\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)}\,\frac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^j(\theta-\Theta)}\,\frac{1}{(1-\frac{\varepsilon}{\mathcal{E}})(1-\frac{\varepsilon'}{\mathcal{E}'})}\left(\frac{\varepsilon'}{\mathcal{E}'}\right)^{n'},$$

et supposer le module Θ déterminé par la formule

$$(52)\qquad \Theta = \frac{1}{2}\,\frac{1-\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1+\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\,\frac{1-\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\left\{e^{\Psi}+\mathcal{E}\left(1+\mathcal{E}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\right\}\left\{e^{\Psi'}+\mathcal{E}'\left(1+\mathcal{E}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)\right\}}.$$

Observons d'autre part que les conditions (38) et (52) devront remplies si l'on a en même temps

$$(53)\qquad \Psi < 1, \qquad \Psi' < 1,$$

(64) $\qquad \varepsilon < \frac{2\sqrt{\Psi}}{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}, \qquad \varepsilon' < \frac{2\sqrt{\Psi'}}{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}},$

et qu'on pourra choisir Ψ, Ψ', π, π' de manière à vérifier ces quatre dernières formules, s'il l'on a

$$\varepsilon \text{ et } \varepsilon' < \frac{2}{e+\frac{1}{e}} = \frac{2}{3,0862\ldots} = 0,64805\ldots,$$

ou, ce qui revient au même

(65) $\qquad \varepsilon < 0,64805\ldots, \qquad \varepsilon' < 0,64805\ldots$

Donc, en définitive, lorsque θ, ε, ε' vérifieront les conditions (50) et (65), il suffira, pour obtenir une limite inférieure du développement de la fonction Σ, d'ajouter entre elles les expressions (51), (63), (61), en supposant la valeur de Θ déterminée par la formule (62), et choisissant Ψ, Ψ', π, π' de manière à vérifier les conditions (63), (64).

Les conditions (65) sont toujours vérifiées pour notre système planétaire, attendu que les excentricités des orbites de toutes les planètes sont inférieures à $\frac{1}{2}$. De plus, si l'on se borne à considérer les sept grosses planètes, savoir, Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, les excentricités de leurs orbites calculées pour l'époque de 1750 seront respectivement

$0,20551320\ldots$ pour Mercure
$0,00688405\ldots$ Vénus
$0,01681095\ldots$ la Terre
$0,09308767\ldots$ Mars
$0,04807670\ldots$ Jupiter
$0,05622460\ldots$ Saturne
$0,04669950\ldots$ Uranus

tandis que les grands axes de ces orbites seront proportionnels aux nombres

$0,248709812\ldots$ pour Mercure

$0,722222200\ldots$ Vénus

$1,000000000\ldots$ la Terre

$1,525269252\ldots$ Mars

$5,201166636\ldots$ Jupiter

$9,537487090\ldots$ Saturne

$19,182200500\ldots$ Uranus.

Donc, en supposant que l'on compte $t=0$ au commencement de l'année 1750, on trouvera que, pour le système des sept grosses planètes,

$$\frac{1-\varepsilon'}{1+\varepsilon} > 1-(\varepsilon+\varepsilon')$$

ne peut devenir inférieur à la différence

$$1-(0,20511220\ldots+0,09208767\ldots) = 0,70279912\ldots,$$

et, d'où l'on prend pour ε l'excentricité de l'orbite de Vénus, à la différence

$$1-(0,00688605\ldots+0,09208767\ldots) = 0,90002827\ldots.$$

D'autre part le rapport

$$\theta=\frac{a}{a'},$$

ne pourra dépasser, si a se rapporte à une planète différente de Vénus, le nombre

$$\frac{0,248709812\ldots}{0,722222200\ldots} = 0,34515992\ldots$$

et, si a se rapporte à Vénus, le nombre

$$0,722222200\ldots.$$

Donc, dans tous les cas, la condition (80) sera vérifiée, et la somme des expressions (51), (60), (61) fournira une limite supérieure au reste du développement de la fonction Σ.

Les modules k, k' seront supérieurs aux excentricités des sept grosses planètes, si l'on prend

(66) $$k=k'=\frac{1}{4}.$$

Si l'on suppose en outre

(67) $$\Psi = \Psi' = \frac{1}{2},$$

on aura

$$e^{\Psi} = 1,624721\ldots, \qquad e^{-\Psi} = 0,6065\,30\ldots,$$

$$\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} = 0,2810906\ldots$$

$$\Theta = \frac{1}{2}\frac{(0,7180\ldots)^3}{(1,2810906\ldots)(1,9699\ldots)^2} = 0,0372766\ldots.$$

La valeur précédente de Θ est très petite. On en obtiendra une plus considérable, si à la formule (67) on substitue la suivante

$$\Psi = \Psi' = \frac{1}{3}.$$

Alors on trouvera

$$e^{\Psi} = 1,3956\,12\ldots, \qquad e^{-\Psi} = 0,7165\,01\ldots,$$

$$\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} = 0,2640\,18\ldots$$

$$\Theta = \frac{1}{2}\frac{(0,7259\,81\ldots)^3}{(1,2640\,18\ldots)(1,7116\,16\ldots)^2} = 0,0593\,8274\ldots$$

$$\frac{1}{\Theta} = 18,577\,87\ldots.$$

Dans cette hypothèse, les expressions (60) et (61) deviennent respectivement inférieures aux deux produits

(69) $$263,0865\ldots \frac{m'}{a'}\frac{1}{(\theta-0,0593\,8274\ldots)(37-1)^2}(18,577\,87\ldots\theta)^3(37)^n,$$

(70) $$263,0865\ldots \frac{m'}{a'}\frac{1}{(37-1)(37-1)^2}(18,577\,87\ldots\theta)^3(37)^{n'}.$$

L'expression (51), qui représente une limite du reste du Développement de I suivant les puissances ascendantes de θ, pourra être remplacée par une limite moindre. En effet, pour obtenir le Développement de la fonction I suivant les puissances ascendantes de θ, il suffit évidemment de développer cette fonction suivant les puissances ascendantes

23

de r ; et, comme on a généralement

$$\mathcal{P} = m' \left\{ r' - re^{\theta\sqrt{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}} \left\{ r' - re^{-\theta\sqrt{-1}} \right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{71}$$

par conséquent

$$\mathcal{P} = \frac{m'}{r'} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{r'} e^{\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{r'^2} e^{2\theta\sqrt{-1}} + \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{r'} e^{-\theta\sqrt{-1}} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{r'^2} e^{-2\theta\sqrt{-1}} + \dots \right\}, \tag{72}$$

il est clair que les différentes termes du développement dont il s'agit seront respectivement inférieurs à ceux qui naîtraient du développement de la fraction

$$\frac{m'}{r'-r} = \frac{m'}{r'} \left\{ 1 + \frac{1}{2}\frac{r}{r'} + \frac{1.3}{2.4}\frac{r^2}{r'^2} + \dots \right\}^2. \tag{73}$$

Donc le reste du développement de $\mathcal{P}$ suivant les puissances ascendantes de θ ne dépassera pas le reste du développement de la fraction

$$\frac{m'}{r'-r}$$

suivant les puissances ascendantes de r, c'est à dire, l'expression

$$\frac{m'}{r'-r}\left(\frac{r}{r'}\right)^j, \tag{74}$$

et à plus forte raison le produit

$$\frac{m'}{a'}\frac{1}{1-\varepsilon'-\theta(1+\varepsilon)}\left\{\theta\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon'}\right\}^j \tag{75}$$

auquel cette expression se réduit quand on attribue à r sa valeur maximum

$$a(1+\varepsilon) = \theta a'(1+\varepsilon)$$

et à r' sa valeur minimum

$$a(1-\varepsilon').$$

Il sera maintenant facile d'assigner aux nombres

$$j, n, n'$$

des valeurs tellement choisies que le reste du développement de $\mathcal{P}$, ordonné suivant les puissances ascendantes de $\theta, \varepsilon, \varepsilon'$, devienne

inférieur au produit de $\frac{n'}{n^2}$ par une fraction Donnée et Décroissante

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N,$$

N étant un nombre entier quelconque. En effet pour y parvenir, il suffira de choisir j, n, n' de telle manière que les logarithmes décimaux des expressions (75), (69), (70) soient tous négatifs et inférieurs à

$$-N - L(2) = -N - 0,477\,121\,25\ldots$$

Par conséquent il suffira de prendre pour j, n et n' des nombres égaux ou supérieurs à ceux que déterminent les équations

$$(76) \qquad j = \frac{-N + 0,477\,121\,25\ldots - L\left(1-\varepsilon'-\theta(1+\varepsilon)\right)}{L\left\{\frac{1-\varepsilon'}{\theta(1+\varepsilon)}\right\}},$$

$$(77) \qquad n = \frac{N + 2,897\,218\,98\ldots - L(\theta - 0,050\,982\,74\ldots) - L(1-\varepsilon') - L(1-\varepsilon') + j\left\{1,268\,899\,61\ldots + L(\theta)\right\}}{L\left(\frac{1}{2\varepsilon'}\right)},$$

$$(78) \qquad n' = \frac{N + 2,897\,218\,98\ldots - L(\theta - 0,050\,982\,74\ldots) - L(1-\varepsilon') - L(1-\varepsilon') + j\left\{1,268\,899\,61\ldots + L(\theta)\right\}}{L\left(\frac{1}{2\varepsilon'}\right)}.$$

Les valeurs de j, n, n' déterminées par les formules (76), (77), (78) deviennent alors considérables, lorsque la fraction

$$(79) \qquad \frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon'}$$

se rapproche sensiblement de l'unité, ce qui arrive, par exemple, dans la théorie de Vénus et de la Terre, attendu qu'on trouve alors

$$\frac{\theta(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon'} = 0,764\,07\ldots$$

Toutefois il n'est pas possible d'obtenir pour le nombre j une valeur inférieure à celle que détermine la formule (76), quand ce nombre doit être tellement choisi que le reste du développement de Σ suivant les puissances ascendantes de θ devienne inférieur au

terme du produit de $\frac{m'}{a'}$ par $\left(\frac{1}{10}\right)^{M}$. Alors, en effet, pourque la valeur dont il s'agit devienne précisément égal au produit (78), il suffit que les trois quantités

$$\varepsilon, \varepsilon', \pi \text{ et } \cos\theta$$

acquièrent la première ou la plus petite valeur $a'(1-\varepsilon')$ et les deux autres leurs plus grandes valeurs, savoir, $a(1+\varepsilon)$ et l'unité.

Quant aux limites de n, n' déterminées par les formules (77), (78) on pourra les diminuer notablement à l'aide des considérations suivantes.

La somme des termes qui, dans le développement de Π renferment des puissances de θ d'un degré inférieur à j est

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\theta^{j}-\Theta^{j}}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)}\,f(\varepsilon,\varepsilon',\bar{\varepsilon},\psi,\psi')\,d\bar{\varepsilon}, \tag{80}$$

Θ désignant le module de l'expression imaginaire

$$\theta = \Theta e^{\bar{\varepsilon}\sqrt{-1}}$$

et ψ, ψ' des fonctions de $\varepsilon, \varepsilon'$, déterminées par les formules (3) et (4) du § 4 [1re partie]. Cela posé concevons que l'expression (80) étant développée en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes des excentricités $\varepsilon, \varepsilon'$, on nomme

$$S_{n,n'}$$

la somme des termes qui renferment à la fois des puissances de ε d'un degré au moins égal à n et des puissances de ε' d'un degré au moins égal à n'. $S_{n,0}$ sera la somme des termes qui renferment des puissances de ε d'un degré au moins égal à n et

$$S_{0,n'} - S_{0,n'}$$

la somme des termes qui renferment des puissances de ε' d'un

d'un degré au moins égal à n' avec des puissances de ε' d'un degré inférieur à n. Par conséquent l'expression

(81) $$S_{n,0} + S_{0,n'} - S_{n,n'}$$

sera la somme des termes qui renferment des puissances de ε d'un degré au moins égal à n ou des puissances de ε' d'un degré au moins égal à n', c'est-à-dire, la reste qui complète le développement de l'expression (80), quand on y conserve seulement les termes dans lesquels les exposants de

$$\varepsilon, \varepsilon'$$

sont respectivement inférieurs aux nombres

$$n, n'.$$

Or, cette étant précisément celui dont le produit (60) représente une limite, et l'expression (81) ayant toujours un module inférieur à la somme des modules des termes quantités

(82) $$S_{n,0}\ S_{0,n'}\ S_{n,n'},$$

il est clair qu'on pourra substituer à l'équation (60) cette dernière somme ou une somme plus considérable. D'ailleurs, pour obtenir une limite supérieure au module de

$$S_{n,n'},$$

il suffira d'remplacer dans le produit (56) le facteur $\frac{\Theta}{\Theta - \theta}$ par

$$\frac{\theta^i + \Theta^j}{\Theta^{i+j}(\theta - \Theta)}$$

et les facteurs

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon}, \qquad \frac{\varepsilon'}{\varepsilon' - \varepsilon'}$$

par les restes des leurs développements ordonnés suivant les puissances décroissantes de $\varepsilon, \varepsilon'$ savoir

$$\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right)^n}{1 - \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}}, \qquad \frac{\left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right)^{n'}}{1 - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}};$$

Soit qu'on pourra prendre pour limite du module de $S_{n,n'}$ le produit

$$(63)\quad \Psi\bar{\Psi}'\frac{\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi}{\Xi}\right)\left(1-\frac{\xi'}{\Xi'}\right)}\ \frac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)}\ \frac{1+\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{\Psi-\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\ \frac{1+\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\Psi'-\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}\ \Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}').$$

Cette dernier produit deviendra évidemment meilleur du module de $S_{n,0}$, si l'on y remplace

$$\frac{\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n}{1-\frac{\xi}{\Xi}} \quad \text{par} \quad \text{l'unité},$$

puis

$$\Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}') \quad \text{par} \quad \Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\varepsilon',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\psi'),$$

et meilleur du module de $S_{0,n'}$, si l'on y remplace

$$\frac{\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{1-\frac{\xi'}{\Xi'}} \quad \text{par} \quad \text{l'unité},$$

puis

$$\Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}') \quad \text{par} \quad \Lambda\,\mathfrak{f}(\varepsilon,\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\psi,\Xi'+\bar{\psi}').$$

Dans l'expression (60) pourra être remplacé par la somme qu'on obtient en ajoutant au produit (63) les deux suivants

$$(64)\quad \begin{cases} \Psi\ \dfrac{\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n}{1-\frac{\xi}{\Xi}}\ \dfrac{1+\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{\Psi-\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\ \dfrac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)}\ \Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\varepsilon',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\psi'), \\ \bar{\Psi}'\ \dfrac{\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{1-\frac{\xi'}{\Xi'}}\ \dfrac{1+\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\Psi'-\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}\ \dfrac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)}\ \Lambda\,\mathfrak{f}(\varepsilon,\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\psi,\Xi+\bar{\psi}') \end{cases}$$

dont le premier coincide, comme on devait s'y attendre, avec l'expression (61).

Dernière qu'à l'expression (18) on peut substituer l'expression (17), dernière on pourrait à l'expression (56) substituer celle

$$(65)\quad \Psi\bar{\Psi}'\frac{\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}\mathfrak{L}'}\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{L}'\mathfrak{L}'}\ \frac{\Theta}{\Theta-\theta}\ \frac{1+\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{\Psi-\mathfrak{L}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\ \frac{1+\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\Psi'-\mathfrak{L}'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}\ \Lambda\,\mathfrak{f}(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}'),$$

en supposant les modules

$$\mathfrak{L},\mathfrak{L}',\Psi,\Psi'$$

De $\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\Psi}, \bar{\Psi}'$ assujettis uniquement aux conditions (38), mais aux inégalités

$$(86) \qquad \varepsilon < \mathfrak{E}, \quad \varepsilon' < \mathfrak{E}' \qquad \varepsilon \frac{a^{\Psi}+a^{-\Psi}}{2} < \Psi, \quad \varepsilon' \frac{a^{\Psi'}+a^{-\Psi'}}{2} < \Psi'$$

qui seront alors nécessairement vérifiées, si l'on a

$$(87) \qquad \varepsilon < \mathfrak{E}, \quad \varepsilon' < \mathfrak{E}', \qquad \mathfrak{E} = \text{ou} < \frac{2\Psi}{a^{\Psi}+a^{-\Psi}}, \quad \mathfrak{E}' = \text{ou} < \frac{2\Psi'}{a^{\Psi'}+a^{-\Psi'}}.$$

Il y a plus. Ouvert, sans inconvénient, remplacer l'expression (85) considérée comme une fonction de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$ par une autre fonction tellement choisie qu'entre les termes du développement de cette nouvelle fonction suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$ soient respectivement inférieurs aux termes du développement de la première. Il arrivera que, si les conditions (87) sont remplies, on pourra, dans l'expression (85), remplacer les deux produits

$$\Psi \frac{1+\varepsilon\frac{a^{\Psi}+a^{-\Psi}}{2}}{\Psi - \varepsilon\frac{a^{\Psi}+a^{-\Psi}}{2}}, \qquad \Psi' \frac{1+\varepsilon'\frac{a^{\Psi'}+a^{-\Psi'}}{2}}{\Psi' - \varepsilon'\frac{a^{\Psi'}+a^{-\Psi'}}{2}},$$

par les rapports

$$\frac{1+\Psi\frac{\varepsilon}{\mathfrak{E}}}{1-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{E}}} = \frac{1+\Psi}{1-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{E}}} - \Psi, \qquad \frac{1+\Psi'\frac{\varepsilon'}{\mathfrak{E}'}}{1-\frac{\varepsilon'}{\mathfrak{E}'}} = \frac{1+\Psi'}{1-\frac{\varepsilon'}{\mathfrak{E}'}} - \Psi',$$

à plus forte raison par les deux quantités

$$\frac{1+\Psi}{1-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{E}}}, \qquad \frac{1+\Psi'}{1-\frac{\varepsilon'}{\mathfrak{E}'}},$$

et réduire en conséquence l'expression (85) à

$$(88) \qquad \frac{1+\Psi}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\mathfrak{E}}\right)^2}\frac{1+\Psi'}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\mathfrak{E}'}\right)^2}\frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}} A \int f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \theta, \Sigma\alpha\bar{\varepsilon}, \Sigma'\beta\bar{\varepsilon}').$$

Par suite on pourra substituer au produit (83) celui qu'on obtient lorsque dans l'expression (88), on remplace la fraction

$$\frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}}$$

par

$$\frac{\theta^j - \Theta^j}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)},$$

et leurs produits

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\xi}{\Xi}\right)^2} = 1 + 2\frac{\xi}{\Xi} + 3\frac{\xi^2}{\Xi^2} + \cdots + (n+1)\frac{\xi^n}{\Xi^n} + \text{etc.}\cdots$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^2} = 1 + 2\frac{\xi'}{\Xi'} + 3\frac{\xi'^2}{\Xi'^2} + \cdots + (n'+1)\frac{\xi'^{n'}}{\Xi'^{n'}} + \text{etc.}\cdots$$

par les restes Dalembert Dalembert Dalembert en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de ξ, ξ', c'est à dire par

$$(n+1)\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n\left\{1 + \frac{n+2}{n+1}\frac{\xi}{\Xi} + \frac{n+3}{n+1}\frac{\xi^2}{\Xi^2} + \cdots\right\},$$

$$(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}\left\{1 + \frac{n'+2}{n'+1}\frac{\xi'}{\Xi'} + \frac{n'+3}{n'+1}\frac{\xi'^2}{\Xi'^2} + \cdots\right\},$$

et plus forte raison, par

$$(n+1)\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n\left\{1 + 2\frac{\xi}{\Xi} + 3\frac{\xi^2}{\Xi^2} + \cdots\right\} = \frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\Xi}\right)^2},$$

$$(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}\left\{1 + 2\frac{\xi'}{\Xi'} + 3\frac{\xi'^2}{\Xi'^2} + \cdots\right\} = \frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^2}.$$

Cela posé, enfin du produit (83) on obtiendra l'expression

$$(89)\qquad (1+\Phi)(1+\Phi')\frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\Xi}\right)^2}\frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^2}\frac{\theta^{j}_{-}\otimes^{j}}{\otimes^{j-1}(\theta-\otimes)}\Lambda\oint(\xi,\bar{\xi},\xi',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}').$$

Pareillement aux produits (82) on pourra substituer les deux suivants

$$(90)\qquad (1+\Phi)\frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\Xi}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\Xi}\right)^2}\frac{\theta^{j}_{-}\otimes^{j}}{\otimes^{j-1}(\theta-\otimes)}\Lambda\oint(\xi,\bar{\xi},\xi',\bar{\theta},\Xi+\bar{\psi},\psi'),$$

$$(91)\qquad (1+\Phi')\frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\Xi'}\right)^2}\frac{\theta^{j}_{-}\otimes^{j}}{\otimes^{j-1}(\theta-\otimes)}\Lambda\oint(\xi,\bar{\xi},\bar{\theta},\psi,\Xi'+\bar{\psi}').$$

Donc la restitution de Σ offrira un module inférieur à la somme des produits (79), (89), (90), (91), si les modules

$$\xi,\ \bar{\xi},\ \Phi,\ \Phi'$$

sont choisis de manière à vérifier les conditions (87). Il est d'ailleurs important d'observer ici que, dans le produit (89), on peut remplacer le facteur

$$\Lambda\oint(\xi,\bar{\xi},\xi',\Xi+\bar{\psi},\Xi'+\bar{\psi}')$$

par le second membre de la formule (56) du § 4 [2e partie], et réduisons ainsi ce produit à

$$(92)\qquad \frac{n'}{a'_j}\,\frac{(1+\Psi)(1+\Psi')}{1-\Psi'}\,\frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\xi'}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\xi'}\right)^2}\,\frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\xi}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\xi}\right)^2}\,\frac{\beta^i_{-}\otimes^{i}}{\otimes^{j-1}(\theta-\otimes)},$$

pourvu que, $\mathcal{J}$ étant une quantité positive, on détermine j et $\otimes$ de manière à vérifier les conditions

$$(93)\quad \begin{cases} 1-\mathcal{L}'\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi'}}{2}-\otimes\left(1+\mathcal{L}\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)=\omega>0 \\ \left[1-\mathcal{L}'\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi'}}{2}-\otimes\left(1+\mathcal{L}\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\right]^2-2\mathcal{L}\otimes\left(1+\mathcal{L}\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(1-\mathcal{L}'\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi'}}{2}\right)=\omega\rangle\mathcal{J}^2(1-\Psi)^2, \end{cases}$$

la valeur de $\mathcal{L}+1$ étant

$$(94)\qquad \mathcal{L}+1=\frac{e^{\Psi}+\mathcal{L}+\mathcal{V}\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1-\mathcal{L}\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\;\;\frac{e^{\Psi'}+\mathcal{L}'+\mathcal{V}'\,\dfrac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{1-\mathcal{L}'\,\dfrac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}},$$

et les quantités

$$\mathcal{L}\,\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2},\qquad \mathcal{L}'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}$$

étant inférieures à l'unité; c'est qu'en vertu des formules (47) les conditions (93) seront vérifiées, si $\otimes$ ne surpasse pas la plus petite racine de l'équation

$$(95)\qquad \left\{1-\Psi'-\otimes(1+\Psi)\right\}^2-2\mathcal{L}\otimes(1+\Psi)(1-\Psi')=\mathcal{J}^2(1-\Psi')^2,$$

la valeur de $\mathcal{L}+1$ étant réduite à

$$(96)\qquad \mathcal{L}+1=\frac{e^{\Psi}+\mathcal{L}+\dfrac{\mathcal{V}}{\mathcal{L}}\Psi}{1-\Psi}\;\;\frac{e^{\Psi'}+\mathcal{L}'+\dfrac{\mathcal{V}'}{\mathcal{L}'}\Psi'}{1-\Psi'},$$

et les quantités Ψ, Ψ', $\mathcal{J}$ étant assujetties aux conditions

$$(97)\qquad \Psi<1,\qquad \Psi'<1$$

$$(98)\qquad \mathcal{J}<1;$$

ou, ce qui revient au même, si $\otimes$ ne surpasse pas la plus petite racine de l'équation

$$(99)\qquad (1-\Psi')^2-2\mathcal{V}\mathcal{V}'\otimes(1+\Psi)(1-\Psi')+\otimes^2(1+\Psi)^2=\mathcal{J}^2(1-\Psi')^2,$$

les valeurs de $\mathcal{V}, \mathcal{V}'$ étant

24

(100) $$V = \frac{e^{\Psi} + \Sigma + \frac{U}{\Sigma}\Psi}{1-\Psi}, \qquad V' = \frac{e^{\Psi'} + \Sigma' + \frac{U'}{\Sigma'}\Psi'}{1-\Psi'};$$

si que, si la valeur de Θ déterminée par l'équation (99) surpasse θ, il suffira de substituer cette valeur dans l'expression (88) ou

(101) $$\frac{m'}{a'} \frac{(1+\Psi)(1+\Psi')}{1-\Psi'} \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^2} \frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}},$$

pourvu que le reste du développement de cette expression en une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$ fournisse une limite supérieure au module du reste du développement de la fonction $\mathfrak{L}$. Ajoutons que, dans la détermination de

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \Sigma+\bar{\Psi}, \Psi')$$

on ait à la formule (96) du [2e partie] substituer celle-ci

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \Sigma+\bar{\Psi}, \Psi') = \text{ou} < \frac{m'}{a'} \frac{1}{\left\{[1-\varepsilon'-\Theta(1+\Sigma\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2})]^2 - 2\Omega\Theta(1-\varepsilon')(1+\Sigma\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2})\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

à plus forte raison de la suivante

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, \Sigma+\bar{\Psi}, \Psi') = \text{ou} < \frac{m'}{a'} \frac{1}{\left\{[1-\varepsilon'-\Theta(1+\Psi)]^2 - 2\Omega\Theta(1-\varepsilon')(1+\Psi)\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

en supposant

$$\Omega = \text{ou} > \Lambda\left(\cos\bar{\Delta} - \cos\Delta_{\Sigma, p'-\varpi'}\right)$$

et déterminant $\cos\bar{\Delta}$ non par l'équation (61) du [2e partie], mais par la formule

$$\cos\bar{\Delta} = \frac{\cos\Delta_{\Sigma+\bar{\Psi}, p'-\varpi'} - \bar{\varepsilon}\cos\Delta_{0, p'-\varpi'} - \bar{v}\cos\Delta_{\frac{\pi}{2}, p'-\varpi'}\sin(\Sigma+\bar{\Psi})}{1-\bar{\varepsilon}\cos(\Sigma+\bar{\Psi})}.$$

Il en résulte qu'on pourra prendre

(102) $$\Omega = \left\{\frac{\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1-\Sigma\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}} - 1\right\}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma, p'-\varpi'}} + \frac{\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1-\Sigma\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\sqrt{\cos^2\Delta_{\Sigma+\frac{\pi}{2}, p'-\varpi'}}$$
$$+ \frac{\Sigma\sqrt{\cos^2\Delta_{0, p'-\varpi'}} + \bar{v}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos^2\Delta_{\frac{\pi}{2}, p'-\varpi'}}}{1-\Sigma\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}},$$

à plus forte raison

(105) $$\mathcal{R}+1=\frac{e^{\frac{\Psi}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\nu}{2}e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}{1-\frac{\varepsilon}{2}\frac{e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}{2}},$$

ou même encore

(106) $$\mathcal{R}+1=\frac{e^{\frac{\Psi}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\nu}{2}\frac{\Psi}{2}}{1-\frac{\Psi}{2}}=\nu,$$

et qu'on pourra réduire le produit (g_0) à

(109) $$\frac{m'}{a'j}\,\frac{1+\frac{\Psi}{2}}{1-\varepsilon'}\,\frac{(n+1)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}{\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}\,\frac{\beta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\beta-\Theta)},$$

j désignant toujours un nombre inférieur à l'unité, et Θ ne pouvant dépasser la plus petite racine de l'équation

(108) $$(1-\varepsilon')^2-2\nu\Theta(1+\Psi)(1-\varepsilon')+\Theta^2(1+\Psi)^2=j^2(1-\varepsilon')^2.$$

Pareillement le produit (g_1) pourra être réduit à

(107) $$\frac{m'}{a'j}\,\frac{1+\frac{\Psi'}{2}}{1-\Psi'}\,\frac{(n+1)\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2}\,\frac{\beta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\beta-\Theta)},$$

j désignant un nombre inférieur à l'unité, et Θ ne pouvant dépasser la plus petite racine de l'équation

(108) $$(1-\Psi')^2-2\nu'\Theta(1+\varepsilon)(1-\Psi')+\Theta^2(1+\varepsilon)^2=j^2(1-\Psi')^2.$$

Comme le rapport

$$\frac{2\Psi}{e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}$$

croît avec Ψ depuis la limite $\Psi=0$ jusqu'à la limite

$$\Psi=1,1996780\ldots,$$

à plus forte raison, depuis la limite $\Psi=0$ jusqu'à la limite $\Psi=1$; comme d'ailleurs, en prenant $\Psi=1$, on trouve

$$\frac{2\Psi}{e^{\frac{\Psi}{2}}+e^{-\frac{\Psi}{2}}}=\frac{2}{e+\frac{1}{e}}=0,6440\ldots,$$

il est clair que les conditions (97) et (97) seront vérifiées, si, en sup-

- posant

(109) $\qquad \varepsilon < \tilde{\varepsilon} < 0,6480\ldots\,, \qquad \varepsilon' < \tilde{\varepsilon}' < 0,6480\ldots$

on choisit Φ, Φ' de manière à vérifier les équations

(110) $\qquad \frac{2\Phi}{e^{\Phi}+e^{-\Phi}} = \tilde{\varepsilon}, \qquad \frac{2\Phi'}{e^{\Phi'}+e^{-\Phi'}} = \tilde{\varepsilon}'.$

Cela posé, convenons que, pour mieux distinguer entre elles les valeurs de Θ propres à vérifier les équations (99), (106), (106 bis), on désigne ces mêmes valeurs par

$$\Theta_1, \quad \Theta, \quad \Theta'.$$

Le reste du développement de la fonction Σ, suivant les principes ci-dessus établis, offrira un module inférieur à la somme de l'expression (78) et des suivantes

(111) $$\frac{m'}{a'j}\,\frac{(1+\Phi)(1+\Phi')}{1-\Phi'}\,\frac{(n+1)\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}\right)^n}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}\right)^2}\,\frac{(n'+1)\left(\frac{\varepsilon'}{\tilde{\varepsilon}'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\tilde{\varepsilon}'}\right)^2}\,\frac{\theta^j-\Theta_1^j}{\Theta_1^{j-1}(\theta-\Theta_1)},$$

(112) $$\begin{cases} \dfrac{m'}{a'j}\,\dfrac{1+\Phi}{1-\varepsilon'}\,\dfrac{(n+1)\left(\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}\right)^n}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}\right)^2}\,\dfrac{\theta^j-\Theta^j}{\Theta^{j-1}(\theta-\Theta)}, \\ \dfrac{m'}{a'j}\,\dfrac{1+\Phi'}{1-\Phi'}\,\dfrac{(n'+1)\left(\frac{\varepsilon'}{\tilde{\varepsilon}'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\tilde{\varepsilon}'}\right)^2}\,\dfrac{\theta^j-\Theta'^j}{\Theta'^{j-1}(\theta-\Theta')}, \end{cases}$$

$\Theta_1, \Theta, \Theta'$ étant les plus petites racines des trois équations

(113) $$(1-\Phi')^2 - 2V\Theta'\Theta_1(1+\Phi)(1-\Phi') + \Theta_1^2(1+\Phi)^2 = j^2(1-\Phi')^2,$$

(114) $$\begin{cases} (1-\varepsilon')^2 - 2V\Theta(1+\Phi)(1-\varepsilon') + \Theta^2(1+\Phi)^2 = j^2(1-\varepsilon')^2, \\ (1-\Phi')^2 - 2V'\Theta(1+\varepsilon)(1-\Phi') + \Theta^2(1+\varepsilon)^2 = j^2(1-\Phi')^2, \end{cases}$$

les valeurs de Φ, Φ' étant déterminées par les formules (110), et les nombres j, $\tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\varepsilon}'$ étant assujettis aux conditions (98), (109) auxquelles on pourra toujours satisfaire, en choisissant convenablement les valeurs de ε, ε', si l'on a

(69) $\qquad \varepsilon < 0,6480\ldots\,, \qquad \varepsilon' < 0,6480\ldots$

Les conditions (69), et la condition (80), qui pourrait être présentée

sous la forme

$$a(1+\varepsilon) < a'(1-\varepsilon') \qquad (119)$$

Soit ici seulement que les demi-grands axes a, a' et les excentricités ε, ε' doivent vérifier, pour que les formules (78), (111), (112) soient applicables à la détermination d'une limite supérieure au module du reste du développement de la fonction Σ. La condition (119) exprime que la distance périhélie de la planète m' au soleil surpasse la distance aphélie de la planète m à cet astre.

Les conditions (85) sont vérifiées non seulement pour les sept grosses planètes, mais aussi pour les quatre petites qui ont été plus récemment découvertes. En effet les excentricités de Vesta, Junon, Cérès et Pallas sont respectivement

pour Vesta	0,1078298 ...,
Junon	0,2582604 ...,
Cérès	0,0785028 ...,
Pallas	0,2447424 ....

D'autre part, comme les grands axes des orbites de celles-ci, comparés au grand axe de l'orbe terrestre, sont respectivement proportionnels

pour Vesta	à	2,3629198 ...,
Junon		2,6700367 ...
Cérès		2,7672485 ...
Pallas		2,7684261 ...

on reconnaîtra sans peine que la condition (119) est toujours vérifiée pour les grandes et les petites planètes, excepté dans le cas où l'on prend pour m, m' deux de ces dernières. Donc, si l'on excepte ce dernier cas, les formules (78), (111), (112) pourront toujours être appliquées, dans notre système planétaire, à la

détermination d'une limite supérieure au reste du développement dela fonction P.

La plus petite racine de l'équation (117) est

$$\Theta_1 = \frac{1-\Psi'}{1+\Psi'}\left\{\nu\nu' - \sqrt{[}\nu^2\nu'^2 - (1-\vartheta^2)\,]\right\}, \tag{116}$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Theta_1 = \frac{1-\Psi'}{1+\Psi'}\,\frac{1-\vartheta^2}{2\nu\nu'}\left\{1 + \frac{1}{4}\,\frac{1-\vartheta^2}{\nu^2\nu'^2} + \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\,\frac{(1-\vartheta^2)^2}{\nu^4\nu'^4} + \cdots\right\}. \tag{117}$$

Cette plus petite racine croît évidemment lorsqu'on fait décroître les quantités $\vartheta, \Psi, \Psi', \nu, \nu'$, pour s'approcher, lorsque les nombres

$$\vartheta,\ \Psi,\ \Psi'$$

deviennent ou se rapprochent de leurs limites inférieures

$$0,\ \varepsilon,\ \varepsilon'.$$

On obtiendra donc la limite supérieure de Θ_1 lorsque, dans la formule (116) ou (117), jointe aux formules (88) et (100), on supposera

$$\vartheta = 0,\quad \Psi = \varepsilon,\quad \Psi' = \varepsilon', \tag{118}$$

et les modules Ψ, Ψ' déterminés par les deux équations

$$\frac{e^{\Psi}}{e^{\Psi}+e^{-\Psi}} = \varepsilon,\qquad \frac{e^{\Psi'}}{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}} = \varepsilon'. \tag{119}$$

Si cette limite supérieure de Θ_1 surpasse le rapport $\theta = \frac{a}{a'}$, c'est-à-dire, si l'on a

$$\frac{a}{a'} < \frac{1-\Psi'}{1+\Psi'}\left\{\nu\nu' - \sqrt{[}\nu^2\nu'^2 - 1\,]\right\}, \tag{120}$$

pour les valeurs de Ψ, Ψ' que donnent les formules (119), on pourra choisir Ψ, Ψ' de manière à vérifier la condition (109) avec la suivante

$$\Theta_1 > \theta, \tag{121}$$

et, il suffira de poser, dans le produit (101), $\Theta = \Theta_1$, pour que ce produit développé suivant les puissances ascendantes de

$\varepsilon, \varepsilon', t$

fournit la moitié supérieure au moins de la droite correspondant à la fonction P. Observons d'ailleurs que la formule (120) peut s'écrire comme il suit

$$\frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')} < VV' - \tfrac{1}{2}(V^2V'^2 - 1), \tag{122}$$

et qu'on aura successivement

$$\tfrac{1}{2}(V^2V'^2 - 1) < VV' - \frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')},$$

puis

$$V^2V'^2 - 1 < \left\{ VV' - \frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')} \right\}^2$$

ou, ce qui revient au même,

$$VV' < \frac{1}{2}\left\{ \frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')} + \frac{a'(1-\Psi')}{a(1+\Psi)} \right\}. \tag{123}$$

Les formules (122), (123) peuvent être substituées l'une et l'autre à la condition (120).

Il est facile de trouver pour chaque planète une valeur très approchée de la quantité Ψ qui vérifie la première des équations (119), savoir

$$\frac{e\Psi}{a^{\Psi} + a^{-\Psi}} = \varepsilon, \tag{124}$$

ou

$$\Psi = \varepsilon\left(1 + \frac{\Psi^2}{2} + \frac{\Psi^4}{24} + \cdots\right) = \varepsilon\left(1 + \frac{\Psi^2}{2}\right) + \frac{\varepsilon\Psi^4}{24}\left(1 + \frac{\Psi^2}{20} + \cdots\right). \tag{125}$$

En effet, les excentricités des orbites planétaires étant inférieures à $0{,}1$ et même à $0{,}2$, la valeur de Ψ déterminé par l'équation (124) ou (125) restera en même temps que ε, et l'on pourra en dire autant du rapport

$$\frac{\Psi}{\varepsilon} = \frac{a^{\Psi} - a^{-\Psi}}{e},$$

et de la fonction

$$1 + \frac{\Psi^2}{20} + \frac{\Psi^4}{1680} + \cdots$$

D'autre part, si l'on prend successivement

$$\Psi = 0, \quad \Psi = 0,9,$$

on trouvera, dans le premier cas

$$\frac{\Psi}{\varepsilon} = \frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{2} = 1, \qquad \varepsilon = 0$$

$$1 + \frac{\Psi^2}{20} + \frac{\Psi^4}{1680} + \dots = 1,$$

dans le second cas

$$\frac{\Psi}{\varepsilon} = \frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{2} = 1,0\,4\,5\,3\,4\,7\dots \qquad \varepsilon = 0,28\,6\,9\,8\dots > 0,26$$

$$1 + \frac{\Psi^2}{20} + \frac{\Psi^4}{1680} + \dots = 1,0\,0\,3\,0\,0\,4\,8\dots$$

Cela posé, il est clair que, si, pour chaque planète, on réduit l'équation (119) à

(126) $$\Psi = \varepsilon \left(1 + \frac{\Psi^2}{20}\right),$$

l'erreur commise sur la valeur de Ψ sera comprise entre les limites

$$\frac{\varepsilon^3}{24} = 0,0\,4\,1\,6\,6\dots\varepsilon^3, \qquad \frac{\varepsilon^3}{24}(1,0\,4\,5\,3\,4\,7\dots)^4 (1,0\,0\,3\,0\,0\,4\,8\dots) = 0,0\,4\,9\,9\,0\,2\dots\varepsilon^3,$$

à plus forte raison entre les limites

(127) $$0,0\,4\,\varepsilon^3, \qquad 0,0\,5\,\varepsilon^3.$$

Enfin celle des racines de l'équation (126) qui décroît avec ε se réduit à

(128) $$\Psi = \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 2\right) = \varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3}\varepsilon^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 3 \cdot 4}\varepsilon^7 + \text{etc.}\dots$$

Donc la valeur de Ψ propre à vérifier l'équation (126) sera comprise entre les limites

(129) $$\Psi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}{\varepsilon} + 0,0\,4\,\varepsilon^5, \qquad \Psi = \frac{1 - \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}}{\varepsilon} + 0,0\,5\,\varepsilon^5,$$

ou, ce qui revient au même, entre les limites

(130) $$\Psi = \frac{2\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}} + 0,0\,4\,\varepsilon^5 \qquad \Psi = \frac{2\varepsilon}{1 + \sqrt{1 - 2\varepsilon^2}} + 0,0\,5\,\varepsilon^5,$$

et les chiffres communs à ces deux limites lui appartiendront certainement. On trouvera de cette manière pour les valeurs de Ψ relatives à

Mercure	$\Psi = 0,210065\ldots$
Vénus	$0,006884\ldots$
la Terre	$0,016816\ldots$
Mars	$0,093464\ldots$
Jupiter	$0,048102\ldots$
Saturne	$0,056910\ldots$
Uranus	$0,046755\ldots$

et pour les valeurs de Ψ relatives à

Vesta	$\Psi = 0,190584\ldots$
Junon	$0,272660\ldots$
Cérès	$0,078999\ldots$
Pallas	$0,260900\ldots$

Cela posé, les valeurs de V tirées des équations (58), (100), (118), ou, ce qui revient au même de la formule

$$V = \frac{e^{\Psi} + \varepsilon + \frac{1-(1-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}\Psi}{1-\Psi} \tag{121}$$

et les produits $a(1-\Psi)$, $a(1-\overline{\Psi})$, $a(1+\overline{\Psi})$ deviendront respectivement

(122)

pour Mercure... $V = 1,846962\ldots$,	$a(1-\Psi) = 0,993782\ldots$,	$a(1+\Psi) = 1,699414\ldots$,
Vénus	$1,020844\ldots$,	$0,718052\ldots$,	$0,728012\ldots$,
la Terre	$1,051599\ldots$,	$0,988180\ldots$,	$1,018916\ldots$,
Mars	$1,018746\ldots$,	$1,081206\ldots$,	$1,666190\ldots$,
Vesta	$1,742041\ldots$,	$1,910292\ldots$,	$2,810104\ldots$,
Junon	$2,206011\ldots$,	$1,946225\ldots$,	$2,096896\ldots$,
Cérès	$1,263961\ldots$,	$2,548657\ldots$,	$2,855800\ldots$,
Pallas	$2,130100\ldots$,	$2,046021\ldots$,	$2,490501\ldots$,
Jupiter	$1,154081\ldots$,	$1,950822\ldots$,	$1,971510\ldots$,
Saturne	$1,182021\ldots$,	$1,000758\ldots$,	$1,076984\ldots$,
Uranus	$1,149027\ldots$,	$1,296475\ldots$,	$1,081080\ldots$,

Dans le tableau qui précède, les planètes sont rangées d'après l'ordre de grandeur des aires de leurs orbites; d'où il résulte que la planète m' devra toujours être une de celles qui, dans ce tableau, suivent la planète m. Ainsi, par exemple, si m est la planète Mars, m' ne pourra être que Jupiter, Saturne, Uranus, ou l'une des quatre petites planètes. Ajoutons qu'on ne devra jamais prendre à la fois pour m et pour m' deux des petites planètes, puisque alors le critérium (119) ne devait plus vérifié. Cela posé, l'inspection du tableau (132) suffit pour montrer que le produit $a'(1-\Psi')$ surpassera toujours le produit $a(1+\Psi)$. Par conséquent des deux rapports

$$\frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')}, \qquad \frac{a'(1+\Psi')}{a(1-\Psi)}$$

le premier sera inférieur, le second supérieur à l'unité, et leur demi-somme sera inférieure au second rapport dont elle surpassera la moitié. On en conclut immédiatement que la condition (129) sera vérifiée, si l'on a

$$VV' < \tfrac{1}{2}\,\frac{a'(1-\Psi')}{a(1+\Psi)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{a'(1-\Psi')}{V'} > a(1+\Psi)V, \tag{133}$$

et ne pourra l'être, si l'on a

$$\frac{a'(1-\Psi')}{V'} < a(1+\Psi)V. \tag{134}$$

D'ailleurs, en calculant successivement pour les diverses planètes les valeurs des quantités

$$\tfrac{1}{2}\,\frac{a(1-\Psi)}{V}, \qquad \frac{a(1-\Psi)}{V}$$

et

$$\frac{a'(1+\Psi')}{V},$$

on trouvera

	$\frac{a(1-\Sigma)}{2V}$	$\frac{a(1-\Sigma)}{V}$	$a(1+\Sigma)V$
pour Mercure	0,0826..	0,1653..	0,8664..
Vénus	0,3518..	0,7036..	0,7435..
la Terre	0,4674..	0,9349..	1,0690..
Mars	0,5237..	1,0474..	2,1972..
Vesta	0,7488..	1,0977..	4,9002..
Junon	0,4406..	0,8812..	7,4902..
Cérès	1,0084..	2,0169..	5,7729..
Pallas	0,4800..	0,9600..	7,4969..
Jupiter	2,1849..	4,2598..	6,2915..
Saturne	5,4064..	7,6128..	11,9118..
Uranus	7,9550..	15,9100..	23,0795..

(133)

Donc la condition (129) sera vérifiée, et la racine du développement de la fonction Σ suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$ offrira un module inférieur à l'unité du développement du produit (101), si l'on prend

(134)

pour m	Mercure,	et pour m' Cérès, Jupiter, Saturne ou Uranus,
	Vénus,	Cérès, Jupiter, Saturne ou Uranus,
	la Terre,	Jupiter, Saturne, Uranus
	Mars,	Saturne, Uranus
	Cérès,	Saturne, Uranus
	Vesta, Junon, Pallas, Jupiter,	Uranus.

Mais la condition (129) ne sera plus vérifiée, si l'on prend

(135)

pour m	Mercure et pour m' Vénus
	la Terre Mars, Junon ou Pallas,
	Mars Vesta, Junon, Cérès ou Pallas,
	Vesta, Junon, Pallas, Jupiter.

Au reste on peut aisément déduire des nombres renfermés dans le tableau (132) ceux qui servent à faire connaître, si, pour deux planètes m, m' la condition (129) est ou n'est pas vérifiée. En effet,

Si l'on désirait un, ou plusieurs dans le système de

(136) Mercure, Vénus, la Terre, Mars, Cérès, Jupiter, Saturne, Uranus, c'est à dire, dans le système formé des grandes planètes et de celle des quatre petites qui offre la moindre excentricité, les diverses valeurs du produit VV' seront fournies par le tableau suivant

Planètes prises pour m

Planètes prises pour m'	Mercure	Vénus	la Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne
Vénus	1,4881						
la Terre	1,2450	1,0705					
Mars	2,4092	1,2462	1,2467				
Cérès	2,0372	1,2899	1,2288	1,6664			
Jupiter	2,1346	1,1781	1,2106	1,5219	1,4983		
Saturne	2,1368	1,2070	1,2490	1,5992	1,4940	1,2645	
Uranus	2,1259	1,1700	1,2086	1,5157	1,4923	1,2264	1,2589

(137)

Désignons les diverses valeurs de la demi-somme

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')}+\frac{a'(1-\Psi')}{a(1+\Psi)}\right\}$$

Seront fournies par cet autre tableau

Planètes prises pour m

Planètes prises pour m'	Mercure	Vénus	la Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne
Vénus	1,0928						
la Terre	1,2476	1,0450					
Mars	1,6709	1,2119	1,0472				
Cérès	2,8124	1,8926	1,4527	1,0917			
Jupiter	5,2519	2,4720	2,5071	1,6509	1,1906		
Saturne	3,6007	6,2196	4,4824	2,7906	1,6701	1,1280	
Uranus	19,5220	12,5729	9,0198	5,5001	2,1458	1,8262	1,1829

(138)

Par suite les diverses valeurs de la différence

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')}+\frac{a'(1-\Psi')}{a(1+\Psi)}\right\}-VV'$$

devant aller que prédente le tableau

Planetes prises pour m

Planetes prises pour m'	Mercure	Vénus	la Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne
Vénus	−0,17950						
la Terre	−0,16974	−0,00282					
Mars	−0,17950	−0,01245	−0,02295				
Cérès	0,14752	0,16027	0,11289	−0,15747			
Jupiter	0,11978	0,12942	0,11228	0,11220	−0,00277		
Saturne	0,14469	0,15026	0,12291	0,12944	0,11791	−0,02762	
Uranus	0,14066	0,11,4006	0,11112	0,10174	0,16915	0,14998	−0,01760

(189)

Donc, si m, m' désignent deux planetes prises dans la suite (186), la seule cas où la condition (189) cessera d'être vérifiée sera premièrement le cas où dans la suite dont il s'agit la planete m' succederait immédiatement à la planete m, secondement le cas où l'on prendrait pour m Mercure pour m' la terre ou Mars, troisièmement le cas où m et m' seraient Vénus et Mars.

Examinons maintenant le cas où l'une des planetes m, m' serait Pallas, Junon ou Vesta. Nous avons déjà reconnu que la condition (189) n'etait pas vérifiée quand on prenait une de ces dernieres planetes pour m, m' etant Jupiter, ou pour m', m etant Mars, ou même l'une des planetes Junon, Pallas pour m', m etant la terre. Si, en prenant toujours la terre pour m, on supposait que m' fût la planete Vesta, on trouverait

(190) $$VV' = 1,80129, \qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{a(1+\Psi)}{a'(1-\Psi')}+\frac{a'(1-\Psi')}{a(1+\Psi)}\right\} = 1,2065;$$

et par conséquent la condition (123) ne serait pas encore vérifiée. Enfin, si l'on prend pour m Mercure ou Vénus, et pour m' Vesta, Junon ou Pallas; ou bien pour m Vesta, Junon ou Pallas et pour m' Saturne ou Uranus, les valeurs des quantités

$$VV' \text{ et } \frac{1}{2}\left\{\frac{a(1+\Phi)}{a'(1-\Phi')} + \frac{a'(1-\Phi')}{a(1+\Phi)}\right\}$$

seront celles que fourniront les deux tableaux suivants

(121)

Planètes pour m

Planètes pour m'	Mercure	Vénus	Vesta	Junon	Pallas
Vesta	2,1229	1,1798			
Junon	4,0767	2,2699			
Pallas	3,9421	2,1787			
Saturne			2,0608	2,6058	2,5199
Uranus			2,0036	2,8332	2,4496

(122)

Planètes pour m

Planètes pour m'	Mercure	Vénus	Vesta	Junon	Pallas
Vesta	2,1647	1,5038			
Junon	2,1938	1,5209			
Pallas	2,2986	1,5826			
Saturne			4,7561	4,9130	4,8502
Uranus			3,5271	3,7855	3,7149

et, comme les différentes nombres que contient le premier tableau, et que représentent les diverses valeurs de VV' sont supérieurs aux nombres correspondants du second tableau dans les quatre premières lignes horizontales, mais inférieurs dans la cinquième, nous devons conclure que la condition (123) ne sera jamais remplie, lorsqu'on prendra pour m ou pour m' Vesta Junon ou Pallas, à moins que l'une de ces trois planètes étant désignée

pour m, on ne prenne pour m' la planète Uranus.

Il est bon d'observer que, dans chacun des produits (106), (111), la quantité $\odot$ ou $\odot_1$ ne peut jamais surpasser le second membre de la formule (120), qu'en conséquence dans ces mêmes produits les rapports

$$\frac{\theta}{\odot}, \quad \frac{\theta}{\odot_1} \tag{169}$$

ne peuvent s'abaisser au-dessous du quotient qu'on obtient en divisant le premier membre de la formule (120) par le second. Ce quotient est donc la limite inférieure des rapports (169). C'est, lorsque cette limite surpasse l'unité, que la condition (129) est remplie, et que le reste du développement de la fonction I offre un module inférieur au reste du développement du produit (101). D'ailleurs, si les planètes m, m' sont prises dans la suite (136), la limite dont il s'agit aura pour valeur un des nombres contenus dans le tableau suivant.

Planètes prises pour m

Planètes prises pour m'	Mercure	Vénus	la Terre	Mars	Cérès	Jupiter	Saturne
Vénus	2,2760						
la Terre	1,7400	1,0849					
Mars	1,5810	1,1858	1,7295				
Cérès	0,8176	0,6015	0,8792	1,3608			
Jupiter	0,3804	0,2650	0,3905	0,5932	1,5139		
Saturne	0,2250	0,1524	0,2229	0,3100	0,8661	1,0844	
Uranus	0,1029	0,0712	0,1050	0,1619	0,4090	0,6554	1,2559

(166)

Donc la formule (101) sera toujours applicable au système de deux planètes prises dans la suite (136), à moins que m, m' ne soient deux des trois planètes

Vénus, la Terre, Mars,

ou que la planète m' ne soit celle qui, dans la suite ou quatrième sec-

-cede immédiatement à la planète m. Car conclusion s'accordant, comme on devait s'y attendre, avec celles que nous avons déduites du tableau (139).

Lorsque les excentricités ε, ε' sont telles que non seulement la condition (128), mais encore la condition (129) se vérifie, alors on peut, en attribuant à Σ, Σ' des valeurs différentes de ε, ε', choisir ces valeurs de manière que, les conditions (109) étant remplies, l'équation

$$\Theta = \frac{1-\Psi'}{1+\Psi'}\,\frac{1}{2\sqrt{\nu\nu'}} \tag{145}$$

fournisse des valeurs de Θ supérieures à β. Or, si l'on adopte cette dernière valeur de Θ, l'équation (99) donnera

$$J = \frac{\Theta(1+\Psi)}{1-\Psi'} = \frac{1}{2\sqrt{\nu\nu'}}, \tag{146}$$

et par conséquent le produit (101) sera réduit à

$$\frac{m'}{a'}\,\frac{1+\Psi'}{\Theta}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^2}\,\frac{1}{1-\frac{\beta}{\Theta}}. \tag{147}$$

Il importe d'obtenir que, dans ce produit, la fraction

$$\frac{\beta}{\Theta} = \frac{a\sqrt{\nu}\,(1+\Psi)}{\frac{1}{2}\,\frac{a'(1-\Psi')}{\sqrt{\nu'}}}$$

devra rester comprise entre les limites $\frac{1}{2}$ et 1, si l'on nomme δ la valeur du rapport

$$\frac{a\sqrt{\nu}\,(1+\Psi)}{\frac{1}{2}\,\frac{a'(1-\Psi')}{\sqrt{\nu'}}} \tag{148}$$

dans le cas où l'on remplace Σ par ε, Σ' par ε'; c'est-à-dire que l'on obtiendra cette valeur, en divisant l'un par l'autre deux nombres renfermés l'un dans la troisième colonne verticale du tableau (139), l'autre dans la première. Si l'on suppose d'ailleurs

$$\Sigma' = \Sigma, \tag{149}$$

on conclura des formules (110) et (100)

$$\Psi' = \Psi \quad , \qquad V' = V \tag{150}$$

Par suite l'équation (145) donnera

$$\Theta = \frac{1}{2}\,\frac{1-\Psi}{1+\Psi}\,\frac{1}{V^2}\,, \tag{151}$$

et le produit (147) sera réduit à

$$\frac{n'}{\varepsilon'}\,\frac{1+\Psi}{\Theta}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^2}\,\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^2}\,\frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}}\,. \tag{152}$$

Comme on sera d'ailleurs généralement, pour des valeurs de x comprises entre les limites $0, 1$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x}\,,$$

$$= 1 + x + x^2 + \cdots\cdots + x^{n-1} + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}\,,$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\mathrm{D}\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\mathrm{D}x} = 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + \frac{(n+1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

$$< 1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} + (n+1)\frac{x^n}{(1-x)^2}\,,$$

et par suite

$$\frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}} = 1 + \frac{\theta}{\Theta} + \frac{\theta^2}{\Theta^2} + \cdots + \frac{\theta^{j-1}}{\Theta^{j-1}} + \frac{\left(\frac{\theta}{\Theta}\right)^j}{1-\frac{\theta}{\Theta}}\,,$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^2} < 1 + 2\frac{\varepsilon}{\Sigma} + 3\frac{\varepsilon^2}{\Sigma^2} + \cdots + n\frac{\varepsilon^{n-1}}{\Sigma^{n-1}} + (n+1)\frac{\left(\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^n}{\left(1-\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^2}\,,$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^2} < 1 + 2\frac{\varepsilon'}{\Sigma'} + 3\frac{\varepsilon'^2}{\Sigma'^2} + \cdots + n'\frac{\varepsilon'^{n'-1}}{\Sigma'^{n'-1}} + (n'+1)\frac{\left(\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^2}\,,$$

Il est clair que, si, dans le développement de l'expression (152) suivant les puissances ascendantes de $\varepsilon, \varepsilon', \theta$, on néglige les termes qui renferment des puissances de ε d'un degré au moins égal à n, ou des puissances de ε' d'un degré au moins égal à n', ou des puissances de θ d'un degré au moins égal à j, l'erreur commise ne surpassera pas le produit de l'expression (152) par la somme

$$\left(\frac{\theta}{\Theta}\right)^j + (n+1)\left(\frac{\varepsilon}{\Sigma}\right)^n + (n'+1)\left(\frac{\varepsilon'}{\Sigma'}\right)^{n'},$$

c'est à dire, la somme des trois produits

(193) $$\frac{n'}{a'} W \left(\frac{\theta}{\Theta}\right)^j,$$

(194) $$\frac{n'}{a'} W(n+1)\left(\frac{\varepsilon}{E}\right)^n, \qquad \frac{n'}{a'} W(n'+1)\left(\frac{\varepsilon'}{E}\right)^{n'},$$

la valeur de W étant

(195) $$W = \frac{1+\Sigma}{\Theta} \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon}{E}\right)^2} \frac{1}{\left(1-\frac{\varepsilon'}{E}\right)^2} \frac{1}{1-\frac{\theta}{\Theta}}.$$

De ces trois produits le premier surpassera la somme des valeurs numériques des termes qui, dans Σ, renferment des puissances de θ d'un degré au moins égal à j, et le second ou le troisième la somme des valeurs numériques des termes qui renferment des puissances de ε ou de ε' d'un degré au moins égal à n, ou à n'. Comme d'ailleurs la valeur numérique de la somme des termes de la première espèce ne surpasse pas le produit (78), nous devons conclure que, si, dans le développement de Σ suivant les puissances ascendantes des quantités $\varepsilon, \varepsilon', \theta$, on conserve seulement les termes où les exposants de ces quantités sont inférieurs aux nombres n, n', j, l'erreur commise ne dépassera pas la somme des produits (78) et (194).

Pour montrer une application des formules qui précèdent, supposons que, en étant la terre, m' soit Jupiter. Dans ce cas le nombre désigné par λ, c'est à dire, la limite inférieure de $\frac{\theta}{\Theta}$ deviendra [voyez le tableau (122)]

$$\lambda = \frac{1,0669\ldots}{2,1149\ldots} = 0,4985\ldots$$

Donc $\frac{\theta}{\Theta}$ devra rester compris entre les limites

$$0,4985\ldots \quad ; \quad 1$$

et Θ entre les limites

$$\theta = \frac{1}{5{,}2011\,6636} = 0{,}19226\ldots ; \quad \frac{\theta}{0{,}649850} = 0{,}295766\ldots$$

Cela posé, on pourra vérifier l'équation (151) en attribuant à $\mathfrak{L}$ une valeur comprise entre les excentricités de Mars et de Pallas, c'est-à-dire, entre les nombres

$$0{,}09308767\ldots ; \quad 0{,}18382548\ldots$$

Car le produit

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\Psi}{1+\Psi}\,\frac{1}{V^2}$$

décroît pour des valeurs croissantes de $\mathfrak{L}$, tandis que $\mathfrak{L}$ ne dépasse pas $0{,}6280\ldots$; et les deux valeurs de ce produit correspondantes à

$$\mathfrak{L} = 0{,}09308767\ldots , \quad \mathfrak{L} = 0{,}18382548\ldots$$

seront, en vertu du tableau (133)

$$\frac{0{,}52137}{2{,}19732} = 0{,}2385\ldots , \quad \frac{0{,}52138}{4{,}90032} = 0{,}1111\ldots$$

Si, pour simplifier les calculs, on prend

$$\mathfrak{L} = 0{,}1 , \tag{156}$$

la valeur de Ψ, déterminée par la première des équations (110), sera [voyez la formule (129)] renfermée entre les limites

$$\Psi = 10 - \sqrt{98} + 0{,}0000006, \quad \Psi = 10 - \sqrt{98} + 0{,}0000009.$$

On aura donc à un deux-millionième près

$$\Psi = 10 - \sqrt{98} + 0{,}0000007 = 0{,}1005072\ldots ; \tag{157}$$

puis on tirera des formules (100) et (151)

$$V = 1{,}2466057\ldots , \quad \Theta = 0{,}2255\ldots \tag{158}$$

On trouvera par suite

$$\frac{\theta}{\Theta} = \frac{1}{(5{,}2011\,6636\ldots)(0{,}2255\ldots)} = 0{,}8527171\ldots \tag{159}$$

$$\frac{\varepsilon}{\mathfrak{L}} = 0{,}1681095\ldots , \quad \frac{\varepsilon'}{\mathfrak{L}} = 0{,}4507697\ldots ; \tag{160}$$

et la formule (155) donnera

(161) $$W = \frac{1,100\,5072}{0,2255}\,\frac{1}{(0,4\,5\,1\,8\,6\,0\,5)^2}\,\frac{1}{(0,5\,1\,9\,2\,9\,3)^2}\,\frac{1}{0,1\,4\,7\,5\,9\ldots} = 177,20\ldots$$

En conséquence les produits (154) deviendront

(162) $$(177,20\ldots)\frac{m'}{a'}(n+1)(0,1\,6\,8\,1\,9\,9\,5\ldots)^{n} \;.\; (177,20\ldots)\frac{m'}{a'}(n'+1)(0,1\,4\,4\,0\,7\,6\,7\ldots)^{n'},$$

tandisque l'expression (79) sera réduite à

(163) $$(1,022\,0\,0\,6\ldots)\frac{m'}{a'}(0,2\,0\,9\,3\,7\,0\,8\ldots)^{j}.$$

Donc, lorsqu'en prenant pour n et n' les termes de Jupiter, on supprimera dans le développement de Π les termes où les exposants des quantités

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta$$

surpasseront respectivement les nombres

$$n,\ n',\ j,$$

l'erreur commise ne dépassera pas la somme des produits (162), (163). Cette erreur sera donc inférieure au produit de $\frac{m'}{a'}$ par la fraction

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{N},$$

N étant un nombre entier quelconque, si chacun des produits (162), (163) devient inférieur à

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{10}\right)^{N}\frac{m'}{a'},$$

c'est-à-dire, si les valeurs des nombres j, n, n' surpassent celles que déterminent les formules

$$j = \frac{N + \Gamma(3) + \Gamma(1,022\,0\,0\,6\ldots)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,2\,0\,9\,3\,7\,0\,8}\right)} = \frac{N + 0,\,5\,9\,8\,0\,5\,4\,7}{0,6\,8\,7\,6\,1\,2},$$

$$n = \frac{N + \Gamma(3) + \Gamma(177,20) + \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,1\,8\,8\,1\,9\,9\,5}\right)} = \frac{N + 2,7\,2\,5\,5\,8\,6\,5 + \Gamma(n+1)}{0,7\,7\,6\,0\,0\,0\,2},$$

$$n' = \frac{N + \Gamma(3) + \Gamma(177,20) + \Gamma(n'+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{0,4\,4\,0\,7\,6\,7}\right)} = \frac{N + 2,7\,2\,5\,5\,8\,6\,5 + \Gamma(n'+1)}{0,5\,1\,8\,0\,6\,5\,3},$$

ou plus simplement les formules

(164) $$j = 1,4\,5\,4\,6\ldots N + 0,8\,7\,0\,4\ldots,$$

$$(165)\qquad \begin{cases} n = 1,2914\ldots\,[N + I(n+1)] + 0,5198\ldots \\ n' = 0,1441\ldots\,[N + I(n'+1)] + 0,8969\ldots \end{cases}$$

Il est important d'observer que les différences entre les premiers et les seconds membres des équations (165) sont des fonctions de n ou de n' dont les dérivées

$$1 - \frac{1,2914}{n+1}\,I(n) = 1 - \frac{0,7522}{n+1},$$

$$1 - \frac{0,1441}{n+1}\,I(n) = 1 - \frac{1,964}{n+1}$$

restent toujours positives pour des valeurs de n ou de n' supérieures à l'unité, et que par suite ces différences croîtront dans cette ère avec les nombres n, n'. Il en résulte que, pour obtenir les valeurs entières de n, n' immédiatement supérieures à celles que déterminent les équations (165), il suffira de calculer les nombres entiers immédiatement supérieurs aux valeurs de n, n' fournies par les équations

$$(166)\qquad \begin{cases} n = 1,2914\,N + 0,5198\ldots, \\ n' = 0,1441\,N + 0,8969\ldots, \end{cases}$$

puis de substituer ces derniers dans les seconds membres des formules (165), de chercher les nombres entiers immédiatement supérieurs aux résultats de ces substitutions, et de continuer ainsi jusqu'à ce que les différences entre les premiers et les seconds membres des formules (165) deviennent positives. En opérant de cette manière, on reconnaît que les valeurs entières de j, n, n' immédiatement supérieures à celles que déterminent les formules (164), (165) sont respectivement, pour $N = 1$,

$$j = 0, \qquad n = 6, \qquad n' = 16,$$

pour $N = 2$

$$j = 4, \qquad n = 8, \qquad n' = 19,$$

pour $N = 3$

$$j = 6, \qquad n = 9, \qquad n' = 23,$$

etc... Donc le reste du développement de la fonction P offrira un module inférieur au produit de $\frac{m'}{a'}$ par un dixième, si l'on prend $j=3$, $n=6$, $n'=16$, au produit de $\frac{m'}{a'}$ par un centième, si l'on prend $j=4$, $n=8$, $n'=19$, etc...

Les valeurs de j que détermine la formule (166) ne sauraient être diminuées. Mais il n'en est pas de même des valeurs de n, n'. On en obtiendra de moindres, si l'on remplace les produits (164) par la somme des expressions (111), (112), dans lesquelles on pourra substituer si l'on veut trois valeurs différentes de j choisies de manière à vérifier successivement les formules (113), (114), valeurs que, pour mieux les distinguer les unes des autres, nous désignerons par

$$j_1,\ j,\ j'.$$

Si d'ailleurs, pour simplifier les calculs, on pose

$$\Theta_1 = \Theta = \Theta' = \theta,$$

l'expression (111) deviendra

$$\frac{m'}{a'j_1}\,\frac{(1+\Psi)(1+\Psi')}{1-\Psi'}\,\frac{(n+1)\left(\frac{s}{\chi}\right)^n}{\left(1-\frac{s}{\chi}\right)^2}\,\frac{(n'+1)\left(\frac{s'}{\chi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{s'}{\chi'}\right)^2}\,j, \tag{167}$$

la valeur de j_1 étant déterminée par l'équation

$$(1-\Psi')^2 - 2\theta V V'(1-\Psi')(1+\Psi) + \theta^2(1+\Psi)^2 = j_1^2(1-\Psi')^2; \tag{168}$$

et les expressions (112) deviendront

$$\begin{cases} \dfrac{m'}{a'j}\,\dfrac{1+\Psi}{1-\varepsilon'}\,\dfrac{(n+1)\left(\frac{s}{\chi}\right)^n}{\left(1-\frac{s}{\chi}\right)^2}\,j, \\ \dfrac{m'}{a'j}\,\dfrac{1+\Psi'}{1-\Psi'}\,\dfrac{(n'+1)\left(\frac{s'}{\chi'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{s'}{\chi'}\right)^2}\,j, \end{cases} \tag{169}$$

les valeurs de j, j' étant déterminées par les équations

$$\begin{cases} (1-\varepsilon')^2 - 2\theta V(1-\varepsilon')(1+\Psi) + \theta^2(1+\Psi)^2 = j^2(1-\varepsilon')^2, \\ (1-\Psi')^2 - 2\theta V'(1+\varepsilon)(1-\Psi') + \theta^2(1+\varepsilon)^2 = j^2(1-\Psi')^2. \end{cases} \tag{170}$$

D'autre part la formule (158) donnera

(171) $$j(1-\Phi') = ou > \theta(1+\Phi),$$

Si ξ, ξ' sont choisis de manière que l'on ait

(172) $$\frac{V'}{1-\Phi'} \cdot V(1+\Phi) = ou < \frac{1}{2\theta}.$$

Dorénavant on pourra, sans inconvénient au produit (169) substituer le suivant

(173) $$\frac{m'}{a'} \frac{1+\Phi'}{\theta} \frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\Sigma}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\Sigma}\right)^2} \frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Sigma'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\Sigma'}\right)^2} j.$$

Pareillement on pourra aux expressions (169) substituer les produits

(174) $$\begin{cases} \frac{m'}{a'} \frac{1}{\theta} \frac{(n+1)\left(\frac{\xi}{\Sigma}\right)^n}{\left(1-\frac{\xi}{\Sigma}\right)^2} j, \\ \frac{m'}{a'} \frac{1+\Phi'}{\theta(1+\varepsilon)} \frac{(n'+1)\left(\frac{\xi'}{\Sigma'}\right)^{n'}}{\left(1-\frac{\xi'}{\Sigma'}\right)^2} j, \end{cases}$$

pourvu que l'on choisisse ξ, ξ' de manière à vérifier les conditions

(175) $$\begin{cases} V(1+\Phi) = ou < \frac{1-\varepsilon}{2\theta}, \\ \frac{V'}{1-\Phi'} = ou < \frac{1}{2\theta(1+\varepsilon)}. \end{cases}$$

Ajoutons 1° qu'il sera facile de déterminer des valeurs de ξ, ξ' propres à vérifier les formules (173), (175) attendu que dans ces formules les premiers membres croissent pour des valeurs croissantes de ξ, ξ', tant que ξ, ξ' ne surpassent pas $0,6180\ldots$ 2° qu'on pourra aisément obtenir les valeurs entières de j, n, n' pour lesquelles le reste de la fonction Φ offre un module inférieur au produit

$$\frac{m'}{a'}\left(\frac{1}{10}\right)^N,$$

en cherchant d'abord celles pour lesquelles chacune des quantités (173), (174), devient inférieure au produit en question, puis augmentant n et n' d'une ou de plusieurs unités, jusqu'à ce que la somme des expressions (173), (174) et (173) devienne inférieure au même produit.

Si l'on prend toujours pour n, n' la Terre et Jupiter, la formule (172), (175) se réduit à

$$\frac{V'}{1-\Psi}, \quad V(1+\Psi) = \text{ou} < 2,6005\ldots \tag{176}$$

$$\begin{cases} V(1+\Psi) = \text{ou} < 2,5575\ldots \\ \dfrac{V'}{1-\Psi'} = \text{ou} < 2,4755\ldots \end{cases} \tag{177}$$

On vérifiera la Dame Seconde, en prenant pour k et pour k' l'excentricité de l'orbite de Mercure, puisqu'alors, dans ce cas,

$$\Psi = \Psi' = 0,2100\,6\ldots, \quad V = V' = 1,8\,4\,9\,6\ldots,$$

et par suite

$$V(1+\Psi) = 2,2381\ldots, \quad \frac{V'}{1-\Psi'} = 2,2\,4\,1\,9\ldots.$$

Cela posé, on trouvera

$$\frac{\varepsilon}{\Sigma} = 0,0\,8\,1\,8\,1\,4\,4\ldots, \qquad \frac{\varepsilon'}{\Sigma'} = 0,2\,3\,3\,9\,3\,5\ldots,$$

et les expressions (174) deviendront

$$\frac{m'}{a'}\,\frac{5,2011\,6\,6\,3\,6\ldots}{(0,9\,1\,8\,1\,5\,6\ldots)^2}\,j(n+1)\,(0,\,8\,1\,8\,1\,4\,4\ldots)^n,$$

$$\frac{m'}{a'}\,\frac{[5,2011\,6\,6\,3\,6\ldots)(1,2100\,6\,5\ldots)}{(1,0168\,1\,2\,9\,5\ldots)(0,\,7\,6\,6\,0\,6\,5\ldots)^2}\,j(n'+1)\,(0,2\,3\,3\,9\,3\,5\ldots)^{n'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\begin{cases} \dfrac{m'}{a'}\,(6,\,1\,6\,9\,3\,5\ldots)\,j(n+1)\,(0,\,0\,8\,1\,8\,1\,4\,4\ldots)^n, \\ \dfrac{m'}{a'}\,(10,\,5\,4\,7\,2\ldots)\,j(n'+1)\,(0,2\,3\,3\,9\,3\,5\ldots)^{n'}. \end{cases} \tag{178}$$

De plus, en prenant pour k' l'excentricité de Mercure, on réduira la formule (176) à la suivante

$$V(1+\Psi) = \text{ou} < \frac{2,6005}{2,3\,4\,1\,5} = 1,1107\ldots, \tag{179}$$

et l'on vérifiera celle-ci, en supposant

$$k = 0,026,$$

D'où l'on conclura

$$\Psi = 0,02600g\ldots, \quad V = 1,0808\ldots$$

$$V(1+\Psi) = 1,108g\ldots$$

Cela posé, on trouvera

$$\frac{s}{\Sigma} = 0,64666g\ldots,$$

et l'expression (179) deviendra

$$\frac{m'}{a'}\,\frac{(5,20116626\ldots)(1,21006g\ldots)}{(0,76606g\ldots)^2(0,35331\ldots)^2}\,j(n+1)(0,64666g\ldots)^{n'(n'+1)}(0,2222g95\ldots)^{n'},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(180)\qquad (8g,g144\ldots)\,\frac{m'}{a'}\,j(n+1)(0,64666g\ldots)^{n'(n'+1)}(0,2222g95\ldots)^{n'}.$$

Il est clair maintenant que la partie de la fonction Π affecte un module inférieur au produit

$$\frac{m'}{a'}\left(\frac{1}{10}\right)^{N},$$

à l'aide duquel on reconnaîtra non seulement chacune des expressions (173), (174), mais encore la somme qu'on obtient en ajoutant à la seconde des expressions (178) l'expression (180), c'est-à-dire, si les valeurs des nombres j, n, n' n'excèdent celles que détermine la formule (164) jointe aux deux suivantes

$$n = \frac{N + \Pi(2) + \Pi(6,16g95\ldots) + \Pi\big(j(n+1)\big)}{\Pi\left(\frac{1}{0,0848144}\right)} = \frac{N + 1,267260g + \Pi\big(j(n+1)\big)}{1,04717},$$

$$n' = \frac{N + \Pi(2) + \Pi\{10,54728\ldots + 8\beta,g144\ldots(n+1)(0,64666g\ldots)^{n'}\} + \Pi\big(j(n'+1)\big)}{\Pi\left(\frac{1}{0,2222g95}\right)}$$

$$= \frac{1,500257g + \Pi\{1 + 8,14572(n+1)(0,6466g\ldots)^{n'}\} + \Pi\big(j(n'+1)\big)}{0,630g051},$$

que l'on peut réduire à

$$(181)\qquad \begin{cases} n = 1,1697\ldots + 0,g198\ldots\{N + \Pi\big(j(n+1)\big)\}, \\ n' = 2,278 + 1,548\{N + \Pi(1 + 8,14572(n+1)(0,64666g)^{n'} + \Pi\big(j(n'+1)\big)\}. \end{cases}$$

Concevons à présent que l'on pose successivement

$$N=1, \qquad N=2, \qquad N=3, \quad \text{etc...}$$

Les valeurs entières de n, n', immédiatement supérieures à celles que détermineront les formules (164) et (161), seront respectivement, pour $N=1$,

$$j=3, \qquad n=4, \qquad n'=8,$$

pour $N=2$

$$j=4, \qquad n=5, \qquad n'=10,$$

pour $N=3$

$$j=6, \qquad n=6, \qquad n'=12,$$

pour $N=4$

$$j=7, \qquad n=7, \qquad n'=13,$$

pour $N=5$

$$j=9, \qquad n=8, \qquad n'=15,$$

etc... Donc, si, uniquement pour n, n' la Terre et Jupiter, on supprime, dans le développement de la fonction R suivant les puissances ascendantes des quantités e, ε, θ, les termes qui renferment les puissances de ces quantités dont les degrés sont respectivement égaux ou supérieurs aux nombres n, n', j, il suffira de prendre $j=3$, $n=4$, $n'=8$ pourque l'erreur commise devienne inférieure à la dixième partie du rapport $\frac{m'}{a'}$, puis $j=4$, $n=5$, $n'=10$, pourque cette erreur devienne inférieure à la centième partie de ce rapport, etc.....

Il est bon d'observer que les expressions

$$\frac{\Gamma(n+1)}{n}, \quad (n+1)(0,6666...)^n$$

acquièrent leurs valeurs minima, la première pour une valeur nulle de n, la seconde pour une valeur négative de n déterminée par la formule

$$\frac{1}{n+1} = \frac{\Gamma(0,6666...)}{\Gamma(2)} = -\frac{0,18930386..}{0,42279...},$$

et décroissent en conséquence pour des valeurs croissantes et positives de n. Comme d'ailleurs en supposant

$$N = \text{ou} > 5$$

on trouvera

$$n = \text{ou} > 8, \qquad n' = \text{ou} > 15,$$

on peut aussi voir qu'on aura, dans cette hypothèse

$$\vdots + (8,14572..)(n+1)(0,67669..)^n = \text{ou} < 1 + (8,14572..)\,9\,(0,67669..)^8$$
$$= \text{ou} < 9,2426\ldots,$$

$$(1,5850..)\,\Sigma\left\{1 + (8,14572..)(n+1)(0,67669..)^n\right\} = \text{ou} < 0,80978\ldots,$$

$$\frac{\Sigma(n+1)}{n} = \text{ou} < \frac{\Sigma(9)}{9} = 0,11928\ldots, \quad \frac{\Sigma(n'+1)}{n'} = \text{ou} < \frac{\Sigma(16)}{15} = 0,08027\ldots,$$

$$(0,9198..)\,\frac{\Sigma(n+1)}{n} = \text{ou} < 0,1097\ldots, \quad (1,5850..)\,\frac{\Sigma(n'+1)}{n'} = \text{ou} < 0,1272\ldots;$$

et qu'en conséquence les valeurs de n, n' fournies par les équations (181) seront inférieures à celles que déterminent les formules

$$(1-0,1097..)\,n = 1,1657\ldots + (0,9198\ldots)\{-N + \Sigma(j)\},$$
$$(1-0,1272..)\,n' = 9,1878\ldots + (1,5850\ldots)\{-N + \Sigma(j)\},$$

que l'on peut réduire à

$$\left\{\begin{array}{l} n = 1,3094\ldots + (1,0991..)\{-N + \Sigma(j)\}, \\ n' = 9,6924\ldots + (1,8181..)\{-N + \Sigma(j)\}. \end{array}\right. \tag{182}$$

On pourra donc, s'il convient, quand N surpassera 5, prendre pour j, n, n' les nombres entiers immédiatement supérieurs à ceux que déterminent les formules (184) et (182). On trouvera ainsi, pour $N = 6$

$$j = 10, \qquad n = 9, \qquad n' = 17,$$

pour $N = 7$

$$j = 12, \qquad n = 10, \qquad n' = 19,$$

etc...

Nous nous bornerons pour le moment aux applica-

-tions que nous venons de faire de formules établies. Pour montrer dans d'autres manières 1° qu'on peut diminuer encore les valeurs qu'elles fournissent pour j, n, n', en tenant compte des inclinaisons des orbites planétaires; 2° qu'on peut appliquer des simplifications nouvelles aux formules du § 9 [2e partie] qui donnent immédiatement les divers termes du développement de la fonction R; 3° comment on peut appliquer le calcul des limites à la fixation des limites supérieures aux restes des séries qui représentent les intégrales d'un système d'équations différentielles, par exemple, les intégrales qui déterminent les mouvements des planètes.

Turin le 6 mars 1859.